Η επίλυση αριθμητικών προβλημάτων από παιδιά προσχολικής ηλικίας

Αικατερίνα Ν. Κορνηλάκη

1. Εισαγωγή

Μια από τις περιοχές που επικεντρώνει το ιδιαίτερο ενδιαφέρον των μελετητών της ανάπτυξης της μαθηματικής σκέψης των παιδιών είναι αυτή της κατανόησης και επίλυσης των αριθμητικών προβλημάτων (βλ. Carpenter & Moser 1982, 1983, 1984, Fuson 1992, Nesher 1992, Riley, Greeno & Heller 1983, Vergnaud 1988). Παλαιότερα, το ενδιαφέρον τόσο των εκπαιδευτικών όσο και των μελετητών ήταν στραμμένο κυρίως στην ορθότητα εκτέλεσης των αριθμητικών πράξεων με χαρτί και μολύβι και την άμεση ανάκληση πράξεων και υπολογισμών (English & Halford 1995: 149). Τις τελευταίες όμως δύο δεκαετίες το ενδιαφέρον στράφηκε στο πώς τα ίδια τα παιδιά κατανοούν τα αριθμητικά προβλήματα και τις αντίστοιχες αριθμητικές πράξεις, ποιες μεθόδους επίλυσης ακολουθούν (problem-solving strategies) και γιατί ορισμένοι τύποι προβλημάτων παρουσιάζουν ιδιαίτερη δυσκολία.

Στο δημοτικό σχολείο οι αριθμητικές πράξεις διδάσκονται με μία ορισμένη σειρά. Όμως, η κατανόησή τους ξεκινά νωρίτερα. Οι Singer, Kohn & Resnick (1997: 116) υποστηρίζουν ότι μέσα στα πλαίσια της καθημερινής εμπειρίας του το παιδί δημιουργεί τα πρώτα σχήματα αύξησης και μείωσης μιας ποσότητας (protoquantitative increase/decrease schema). Για παράδειγμα, χωρίς να χρειάζεται να μετρήσει, το παιδί γνωρίζει ότι η ένωση δύο ποσοτήτων παράγει μια ποσότητα που είναι μεγαλύτερη από τις δύο αρχικές, ενώ η αφαίρεση μέρους μιας ποσότητας οδηγεί στη μείωσή της.

Το παιδί δεν θα αργήσει να υπολογίσει αριθμητικά την αύξηση ή τη μείωση μιας ποσότητας. Ενεργοποιώντας τα σχήματα ένωσης και αφαίρεσης (joining & separating schemas of action) και την ικανότητά τους να μετρούν και να απαριθμούν αντικείμενα, τα παιδιά θα μπορέσουν να επιλύσουν απλά προβλήματα πρόσθεσης και αφαίρεσης. Ο Hughes (1986: 24-36) περιγράφει με έκπληξη πώς παιδιά ηλικίας 2:9 με 4:11 ετών μπορούσαν να υπολογίσουν τα τουβλάκια που υπήρχαν σε ένα κουβαδάκι, χωρίς να τα βλέπουν κάθε φορά που πρόσθετε ή αφαιρούσε τουβλάκια από αυτό.

Μια σύγχρονη και συστηματική προσπάθεια για την κατανόηση των προβλημάτων πρόσθεσης και αφαίρεσης από τα παιδιά προσχολικής ηλικίας ξεκίνησε από τις μελέτες των Carpenter & Moser (1982, 1983) και Riley, Greeno & Heller (1983). Οι παραπάνω ερευνητές αρχικά κατέταξαν τα διάφορα προβλήματα πρόσθεσης και αφαίρεσης σε κατηγορίες με βάση τη σημασιολογική τους δομή (semantic structure). Οι Carpenter & Moser (1983: 14-17) διέκριναν τις εξής τέσσερις κατηγορίες προβλημάτων: α) αλλαγής (change problems) που διακρίνονται στα προβλήματα ένωσης[1] (join problems) και διαχωρισμού[2] (separate problems), β) συνδυασμού[3] (combine problems), γ) σύγκρισης[4] (compare problems) και δ) εξομοίωσης[5] (equalize problems). Ανάλογα με το ποια είναι η ζητούμενη ποσότητα, μπορούμε να δημιουργήσουμε παραλλαγές των προβλημάτων αυτών.

Σε σχετική μελέτη του Riley το 1981 στις Η.Π.Α. και σε παιδιά νηπιαγωγείου, Α΄, Β΄ και Γ΄ τάξης Δημοτικού βρέθηκε ότι τα πιο εύκολα προβλήματα ήταν τα προβλήματα συνδυασμού με ζητούμενο το άθροισμα των δύο συνόλων. Ιδιαίτερα υψηλό ήτάν το ποσοστό επιτυχίας στα προβλήματα ένωσης με ζητούμενο το άθροισμα δύο ποσοτήτων και στα προβλήματα διαχωρισμού με ζητούμενο το υπόλοιπο της αφαίρεσης ενός υποσυνόλου από την αρχική ποσότητα. Ακολουθούσαν τα προβλήματα αφαίρεσης με άγνωστη την αφαιρούμενη ποσότητα, ενώ σημαντικές δυσκολίες παρουσίαζαν οι υπόλοιποι τύποι προβλημάτων, κυρίως για τα παιδιά του νηπιαγωγείου και της πρώτης τάξης του Δημοτικού (Riley, Greeno & Heller 1983: 163).

Τα αποτελέσματα της μελέτης του Riley πιστοποιούν ότι η σχετική δυσκολία των προβλημάτων πρόσθεσης και αφαίρεσης εξαρτάται τόσο από τη σημασιολογική δομή του προβλήματος όσο και από το ποια είναι η άγνωστη ποσότητα. Τα προβλήματα τα οποία είναι προσβάσιμα στο μικρό παιδί είναι αυτά που το παιδί μπορεί να κατανοήσει τις σχέσεις ανάμεσα στους όρους του προβλήματος και να οργανώσει τα σχήματα δράσης του με τέτοιο τρόπο, ώστε να αντανακλούν τις σχέσεις και τις ενέργειες που περιγράφονται σε αυτά. Για παράδειγμα, στο πρόβλημα «Ο Φίλιππος έχει 4 μπίλιες. Ο Χρήστος του έδωσε ακόμα 3 μπίλιες. Πόσες μπίλιες έχει τώρα ο Φίλιππος;» τα περισσότερα παιδιά μπορούν να φτιάξουν ένα σετ με 4 μονάδες, ένα με 3, και ενώνοντάς τα να βρουν το άθροισμά τους. Στην περίπτωση αυτή, οι ενέργειες που οργανώνονται για την επίλυση του προβλήματος βρίσκονται σε πλήρη αντιστοιχία με τις ενέργειες που περιγράφονται στο πρόβλημα. Αντίθετα, το πρόβλημα «Η Μαρία είχε μερικές καραμέλες. Μετά, ο Γιάννης της έδωσε 3. Τώρα η Μαρία έχει 7 καραμέλες. Πόσες καραμέλες της έδωσε ο Γιάννης;» είναι σημαντικά πιο δύσκολο για τα μικρά παιδιά, γιατί, αν και η ενέργεια που περιγράφεται είναι προσθετικού χαρακτήρα («Μετά ο Γιάννης της έδωσε 3»), η πράξη που απαιτείται για να βρεθεί η αρχική ποσότητα είναι η αφαίρεση (7-3=4). Επομένως, αν το παιδί ακολουθήσει την επιφανειακή δομή του προβλήματος, θα δυσκολευτεί να οδηγηθεί στη λύση του.

Τα αποτελέσματα, πάντως, των μελετών των Carpenter & Moser (1983) και Riley, Greeno & Heller (1983) συγκλίνουν στην άποψη ότι η κατανόηση και η λύση προβλημάτων προσθετικού τύπου (additive structure problems), δηλαδή των προβλημάτων που επιλύονται με πρόσθεση ή αφαίρεση, είναι μια μακρά διαδικασία η οποία συντελείται σταδιακά, αρχίζοντας ήδη από την προσχολική ηλικία. Αυτό που δεν μας είναι γνωστό, όμως, είναι αν η κατανόηση προβλημάτων πολλαπλασιαστικού τύπου (multiplicative structure problems), δηλαδή προβλημάτων που επιλύονται με πολλαπλασιασμό και διαίρεση, αρχίζει εξίσου νωρίς. Κύριο λόγο της έλλειψης ερευνητικών δεδομένων στο χώρο αυτό πρέπει να θεωρήσουμε τη γενικότερη εντύπωση, κατά την οποία ο πολλαπλασιασμός και η διαίρεση είναι πράξεις δύσκολες, η κατανόηση των οποίων προϋποθέτει γνώση της πρόσθεσης και της αφαίρεσης. Μια τέτοια όμως θεώρηση, όπως τονίζουν οι Nunes & Bryant (1996: 142), θα σήμαινε ότι η κατανόηση των πολλαπλασιαστικών δομών στηρίζεται και προαπαιτεί την κατανόηση των προσθετικών δομών και ότι δεν συντελείται καμία ποιοτική αλλαγή στον τρόπο σκέψης των παιδιών, όταν αυτά εισάγονται στις νέες αυτές πράξεις. Κάτι τέτοιο, φυσικά, δεν μπορούμε να το κάνουμε αποδεκτό, αφού με τον πολλαπλασιασμό και τη διαίρεση το παιδί εισάγεται σε ένα νέο εννοιολογικό πεδίο[6].

Μια προσπάθεια διερεύνησης της ικανότητας των παιδιών προσχολικής ηλικίας να λύνουν προβλήματα και των τεσσάρων αριθμητικών πράξεων έγινε από τους Carpenter, Ansell, Franke, Fennema & Weisbeck (1993). Οι μελετητές αυτοί εξέτασαν 70 παιδιά νηπιαγωγείου στην Ιταλία σε προβλήματα διαχωρισμού με άγνωστο το υπόλοιπο (α-β=;), ένωσης με άγνωστο το μέγεθος του β΄ προσθετέου (α+;=γ), σύγκρισης, πολλαπλασιασμού, διαίρεσης μερισμού, διαίρεσης μέτρησης, καθώς και σε προβλήματα διαίρεσης με υπόλοιπο και προβλήματα που απαιτούσαν το συνδυασμό δύο πράξεων. Στα νήπια δόθηκε υλικό (μπίλιες, χαρτί και μολύβι), που θα μπορούσαν να χρησιμοποιήσουν για την επίλυση των προβλημάτων. Βρέθηκε ότι ένα σημαντικό ποσοστό των παιδιών έλυσε χωρίς δυσκολία όλους τους τύπους προβλημάτων. Η ανάλυση των διαδικασιών επίλυσης έδειξε ότι τα περισσότερα παιδιά έφταναν στη λύση των προβλημάτων με τη μέθοδο της άμεσης μοντελοποίησης (direct modeling). Δηλαδή τα νήπια με τη βοήθεια του υλικού αναπαριστούσαν τις σχέσεις και τις ενέργειες, που περιγράφονταν στο πρόβλημα.

Τα πορίσματα της μελέτης των Carpenter et al. (1993) δείχνουν ότι τα περισσότερα παιδιά προσχολικής ηλικίας κατανοούν και επιλύουν με επιτυχία προβλήματα προσθετικού και πολλαπλασιαστικού τύπου. Δεν μπορούμε όμως να γενικεύσουμε τα αποτελέσματά της. Τα παιδιά στην εν λόγω έρευνα παρακολουθούσαν ένα νηπιαγωγείο, του οποίου το Αναλυτικό Πρόγραμμα είχε εμπλουτιστεί από τους ερευνητές με δραστηριότητες σχετικές με την επίλυση αριθμητικών προβλημάτων. Αν και τα νήπια δεν «διδάσκονταν» μαθηματικά, ωστόσο κινούνταν σε ένα περιβάλλον πλούσιο σε σχετικά ερεθίσματα. Επομένως το πόρισμα της μελέτης αυτής είναι ότι τα νήπια, αν τους παρέχουμε τη δυνατότητα εξάσκησης με αριθμητικά προβλήματα, έχουν τη δυνατότητα να επιλύσουν τόσο προσθετικά όσο και πολλαπλασιαστικά προβλήματα.

Το γεγονός ότι τα αποτελέσματα της μελέτης των Carpenter et al. ενδέχεται να υπερεκτιμούν τις δυνατότητες των παιδιών αυτής της ηλικίας φαίνεται και από τη σύγκρισή τους με εκείνα προγενέστερης μελέτης της Kouba (1989) στις Η.Π.Α. Η σύγκριση αυτή δείχνει ότι τα παιδιά του νηπιαγωγείου στη μελέτη των Carpenter et al. απέδωσαν τόσο όσο και τα παιδιά της Γ΄ Δημοτικού στη μελέτη της Kouba στα αντίστοιχα προβλήματα πολλαπλασιασμού και διαίρεσης.

Σκοπός της παρούσας μελέτης είναι να εξετάσει αν τα νήπια που παρακολουθούν το πρόγραμμα του ελληνικού νηπιαγωγείου έχουν τη δυνατότητα επίλυσης προβλημάτων των τεσσάρων αριθμητικών πράξεων. Η μελέτη αυτή παρουσιάζει ιδιαίτερο ενδιαφέρον, καθώς τα παιδιά των ελληνικών νηπιαγωγείων, σε αντίθεση με τα παιδιά της μελέτης των Carpenter et al. (1993), δεν εισάγονται συστηματικά στις τέσσερις αριθμητικές πράξεις. Επομένως, μας δίνεται η δυνατότητα να εξετάσουμε α) τι κατανοούν τα παιδιά για τις αριθμητικές πράξεις και β) ποιες μεθόδους επίλυσης ακολουθούν. Για το σκοπό αυτό τα νήπια θα εξεταστούν σε μια σειρά προβλημάτων πρόσθεσης, αφαίρεσης, πολλαπλασιασμού και διαίρεσης, για να μελετηθεί τόσο η σχετική δυσκολία τους όσο και ο τρόπος προσέγγισής τους.

2. Μεθοδολογία

2.1. Υποκείμενα

Στη μελέτη έλαβαν μέρος 60 νήπια (34 αγόρια και 26 κορίτσια) μέσης ηλικίας 5:7 ετών (ηλικιακό εύρος από 5 έως 6:5 ετών) που παρακολουθούσαν νηπιαγωγεία των πόλεων Ηρακλείου και Ρεθύμνου.

2.2. Υλικό

Το υλικό της έρευνας αποτελούνταν από 40 κουμπάκια σε διάφορα χρώματα, τα οποία τα παιδιά μπορούσαν να χρησιμοποιήσουν, για να επιλύσουν τα προβλήματα.

2.3. Σχεδιασμός

Το προτέστ

Προτού δοθούν στα παιδιά τα προβλήματα, τους ζητήθηκε να απαριθμήσουν ένα σύνολο 10 κουμπιών. Αν τα παιδιά έκαναν την απαρίθμηση χωρίς κανένα λάθος, τότε προχωρούσαν στη διαδικασία της έρευνας. Σκοπός του προτέστ ήταν να αποκλείσει την πιθανότητα τα λάθη των παιδιών κατά την πειραματική διαδικασία να οφείλονταν στις δυσκολίες που αυτά είχαν στη μέτρηση και απαρίθμηση.

Τα 60 παιδιά της έρευνας προήλθαν από ένα δείγμα 71 παιδιών. Αυτό σημαίνει ότι ένα υψηλό ποσοστό νηπίων (85%) δεν είχε δυσκολίες στην απαρίθμηση αντικειμένων από το 1 έως το 10.

Η κύρια έρευνα

Στο κύριο μέρος της έρευνας ζητήθηκε από τα νήπια να λύσουν μια σειρά προβλημάτων και των τεσσάρων αριθμητικών πράξεων (Πίνακας 1).

Τα προβλήματα προσθετικού τύπου που δόθηκαν, σύμφωνα με την ταξινόμηση των Carpenter & Moser (1983: 16), ήταν τα εξής:

α. *Αλλαγής*
- Ένωσης με άγνωστη την τελική κατάσταση.
- Διαχωρισμού με άγνωστη την τελική κατάσταση.

β. *Συνδυασμού*
- Άγνωστη η τιμή του συνδυασμού.
- Άγνωστο το ένα υποσύνολο.

γ. *Σύγκρισης*

δ. *Εξομοίωσης-Ένωσης*

Τα προβλήματα πολλαπλασιαστικού τύπου ήταν τα εξής:

α. *Πολλαπλασιασμού – ίσων ομάδων* (equal groups multiplication problems), σύμφωνα με την ταξινόμηση του Greer (1992: 280).

β. *Διαίρεσης μερισμού* (partitive division).

γ. *Διαίρεσης μέτρησης* (quotitive division).

Η επιλογή των παραπάνω τύπων προβλημάτων έγινε με τα ακόλουθα κριτήρια: Επιλέξαμε να δώσουμε στα παιδιά ένα πρόβλημα από κάθε τύπο προσθετικού προβλήματος. Αποφύγαμε όμως να δώσουμε τα προβλήματα αυτά με όλους τους πιθανούς συνδυασμούς αγνώστων, για να μην αυξήσουμε υπερβολικά το επίπεδο δυσκολίας τους. Σύμφωνα με τη μελέτη του Riley (1981), τα νήπια κατανοούν καλύτερα τα προβλήματα αλλαγής-ένωσης και συνδυασμού με άγνωστη την τιμή του συνδυασμού, στα οποία ζητείται το τελικό άθροισμα, και τα προβλήματα αλλαγής-διαχωρισμού και συνδυασμού με άγνωστο το ένα υποσύνολο. Τα προβλήματα αυτά συμπεριλήφθηκαν στην έρευνά μας, για το λόγο ότι είναι μέσα στο πλαίσιο των δυνατοτήτων των νηπίων.

Στη μελέτη των Carpenter et al. (1993) δόθηκαν στα νήπια μόνο τρία προβλήματα προσθετικού τύπου, αλλαγής-διαχωρισμού, ένωσης με άγνωστο τον ένα προσθετέο και σύγκρισης, χωρίς να γίνεται σαφές από τους ερευνητές ποια ήταν τα κριτήρια επιλογής των συγκεκριμένων προβλημάτων. Στην παρούσα μελέτη συμπεριλήφθηκαν περισσότεροι τύποι προσθετικών προβλημάτων, για να σχηματίσουμε μια πιο ολοκληρωμένη εικόνα για την ικανότητα των μικρών παιδιών να επιλύουν τα προβλήματα αυτά.

Επιπλέον, κάναμε κάποιες αλλαγές στη διατύπωση των προβλημάτων συνδυασμού και σύγκρισης. Μελέτες έχουν δείξει ότι η δυσκολία των προβλημάτων εξαρτάται από πολλούς παράγοντες, όπως είναι το μέγεθος των αριθμών, η γλώσσα των προβλημάτων, η σειρά διατύπωσης των πληροφοριών κ.ά. Πιο συγκεκριμένα, το πρόβλημα συνδυασμού με άγνωστο το ένα υποσύνολο στη μελέτη του Riley (1981) δόθηκε με την εξής λεκτική διατύπωση: «Ο Τζο και ο Τομ έχουν μαζί 8 μπίλιες. Ο Τζο έχει 3 μπίλιες. Πόσες μπίλιες έχει ο Τομ;». Το αποτέλεσμα ήταν ότι μόνο το 22% των νηπίων έδωσε τη σωστή απάντηση. Στη μελέτη όμως των Lindvall & Ibarra (1980, στο Riley et al. 1983: 173) το ποσοστό επιτυχίας των νηπίων ανέβηκε σημαντικά, όταν το ίδιο πρόβλημα διατυπώθηκε με περισσότερες επεξηγήσεις: «Ο Τομ και ο Τζο έχουν μαζί 8 μήλα. Τρία από αυτά τα μήλα είναι του Τομ. Πόσα είναι αυτά που ανήκουν στο Τζο;». Για το λόγο αυτό, το αντίστοιχο πρόβλημα επιλέχθηκε να δοθεί στην παρούσα μελέτη με και χωρίς επεξηγηματική εκφώνηση.

Παρόμοιες αλλαγές στη διατύπωση έγιναν και στα προβλήματα σύγκρισης. Τόσο στη μελέτη του Riley (1981) όσο και σε αυτή των Carpenter et al. (1993) τα προβλήματα σύγκρισης διατυπώθηκαν με τον ακόλουθο τρόπο: «Ο Τζο έχει 8 μπίλιες. Ο Τομ έχει 5 μπίλιες. Πόσες περισσότερες μπίλιες έχει ο Τζο από τον Τομ;». Το ποσοστό επιτυχίας στο πρόβλημα αυτό ήταν 17% στην έρευνα του Riley και 71% σε αυτή των Carpenter et al., όπου τα νήπια είχαν εμπειρία λύσης παρόμοιων προβλημάτων. Η πιο συνηθισμένη λανθασμένη απάντηση των παιδιών στο παραπάνω ερώτημα ήταν να δώσουν το μέγεθος του μεγαλύτερου συνόλου, δηλαδή το 8. Η απάντηση των παιδιών δείχνει ότι κατανοούν την έννοια του «περισσότερο», αλλά δεν ξέρουν τι πρέπει να κάνουν για να βρουν τη διαφορά των δύο συνόλων. Τα παιδιά, όμως, δεν φαίνεται να αποτυγχάνουν στο παραπάνω πρόβλημα, επειδή δεν γνωρίζουν τη σωστή μέθοδο επίλυσης. Αυτό φάνηκε από τη μελέτη του Hudson (1983), όπου το πρόβλημα δόθηκε τόσο με τη μορφή σύγκρισης («Έχουμε 5 παιδιά και 3 μπαλόνια. Πόσο περισσότερα είναι τα παιδιά από τα μπαλόνια;») όσο και με τη μορφή ερώτησης, που υποδείκνυε στα παιδιά την ανάγκη εφαρμογής της ένα προς ένα αντιστοιχίας («Έχουμε 5 παιδιά και 3 μπαλόνια. Αν όλα τα παιδιά τρέξουν να πάρουν τα μπαλόνια, πόσα παιδιά δεν θα πάρουν μπαλόνι;»). Τα αποτελέσματα έδειξαν ότι μόνο το 25% των παιδιών νηπιαγωγείου απάντησε σωστά στην ερώτηση «πόσο περισσότερα», σε αντίθεση με το 96%, που απάντησε σωστά στην ερώτηση «πόσα δεν θα πάρουν». Για το λόγο αυτό στην παρούσα μελέτη το πρόβλημα σύγκρισης δόθηκε και με τους δύο τρόπους.

Κάθε πρόβλημα δόθηκε με διαφορετικούς αριθμούς. Δεν χρησιμοποιήθηκαν αριθμοί μεγαλύτεροι από το 10 και το άθροισμα ή το γινόμενο των προβλημάτων ποτέ δεν υπερέβαινε το όριο αυτό. Οι συνδυασμοί των αριθμών που δόθηκαν διέφεραν συστηματικά από παιδί σε παιδί και από πρόβλημα σε πρόβλημα. Τα προβλήματα δόθηκαν με τυχαία σειρά.

Πίνακας 1

Τα προβλήματα στα οποία εξετάστηκαν τα νήπια

Τύπος προβλήματος	**Το πρόβλημα**
Αλλαγής	
Ένωσης με άγνωστο το άθροισμα	Η Μαρία έχει 4 καραμέλες. Ο Γιάννης της έδωσε άλλες 3. Πόσες καραμέλες έχει τώρα η Μαρία;
Διαχωρισμού με άγνωστη την τελική κατάσταση	Ο Αντώνης έχει 6 μπισκότα. Έδωσε τα 4 στο σκυλάκι του. Πόσα μπισκότα του έμειναν;
Συνδυασμού	
Άγνωστη η τιμή του συνδυασμού	Ο Νίκος έχει 5 κίτρινα και 3 κόκκινα λουλουδάκια. Πόσα λουλουδάκια έχει όλα μαζί;
Άγνωστος το ένα υποσύνολο	
Παραλλαγή α΄	Ο Αλέξης και ο Γιώργος έχουν 7 μπίλιες. Οι 2 είναι του Αλέξη. Πόσες είναι του Γιώργου;
Παραλλαγή β΄	Η Ελένη και η Άννα έχουν βάλει μαζί 7 μολύβια μέσα σε μια κασετίνα. Τα 2, όμως, από αυτά τα μολύβια είναι της Ελένης. Πόσα είναι τα μολύβια της Άννας;
Σύγκρισης	
Παραλλαγή α΄	Ο Κώστας έχει 8 αυτοκόλλητα και ο Τάσος 5. Πόσα περισσότερα έχει ο Κώστας από τον Τάσο;
Παραλλαγή β΄	Η Νίκη έχει 8 κουνελάκια και 5 καρότα; Πόσα κουνελάκια δεν θα φάνε καρότο;
Εξομοίωσης -Ένωσης	Ο Μιχάλης έχει 7 αυτοκινητάκια και ο αδελφός του ο Χρ ήστος έχει 4. Πόσα αυτοκινητάκια πρέπει να αγοράσει η μαμά τους στο Χρήστο, για να έχουν τα δύο αδελφάκια τον ίδιο αριθμό;
Πολλαπλασιασμού – ίσων ομάδων	Η Ελπίδα έχει 4 πακετάκια καραμέλες. Κάθε πακετάκι έχει μέσα 2 καραμέλες. Πόσες καραμέλες έχει όλες μαζί η Ελπίδα;
Διαίρεσης μερισμού	Η Έλλη έχει 10 καραμέλες και θέλει να τις μοιράσει όλες στις 5 φίλες της. Σε κάθε φίλη της θα δώσει τον ίδιο αριθμό από καραμέλες, για να μη ζηλεύουν. Πόσες καραμέλες θα πάρει κάθε φίλη της;
Διαίρεσης μέτρησης	Ο Ανδρέας έχει 8 μαργαρίτες. Θέλει να βάλει 2 σε κάθε βάζο. Πόσα βάζα θα γεμίσει;

2.4 Διαδικασία

Τα νήπια εξετάστηκαν ατομικά στο χώρο του νηπιαγωγείου. Η εξετάστρια τούς είπε ότι θα έπαιζαν ένα παιχνίδι με αριθμούς. Τους εξήγησε ότι για να βοηθηθούν, θα μπορούσαν, αν ήθελαν, να χρησιμοποιήσουν τα κουμπάκια που ήταν πάνω στο τραπεζάκι ή και τα δάκτυλά τους. Κάθε πρόβλημα διαβαζόταν αργά και καθαρά, τόσες φορές όσες αυτό κρινόταν απαραίτητο για την κατανόησή του από το νήπιο. Σε περίπτωση που το παιδί δεν ανταποκρινόταν, η εξετάστρια το ρωτούσε αν θυμόταν το πρόβλημα και αν ήθελε να του το ξαναδιαβάσει. Αν το παιδί βρισκόταν σε αδιέξοδο, τότε προχωρούσε στο επόμενο πρόβλημα. Οι απαντήσεις των παιδιών και ο τρόπος επίλυσης του προβλήματος καταγράφονταν από την εξετάστρια. Αυτό όμως δεν ήταν εύκολο να γίνει, κυρίως όταν τα παιδιά έβρισκαν την απάντηση με νοερές διαδικασίες ή όπως χαρακτηριστικά έλεγαν «με το μυαλό τους». Στην περίπτωση αυτή τους ζητούνταν να πουν τι σκέφτηκαν μέσα το μυαλουδάκι τους, προτού δώσουν την απάντησή τους.

3. Αποτελέσματα

Ποσοτική ανάλυση

Αρχικά εξετάσθηκε το ποσοστό επιτυχίας των παιδιών σε κάθε τύπο προβλήματος. Τα παιδιά κατατάχθηκαν σε τρεις κατηγορίες. α) Σε αυτά που έδωσαν τη σωστή απάντηση. β) Σε αυτά που ακολούθησαν σωστό τρόπο επίλυσης του προβλήματος, αλλά που η τελική τους απάντηση ήταν λανθασμένη λόγω κάποιου υπολογιστικού λάθους. Για παράδειγμα, στο πρόβλημα 4+3=; το νήπιο μπορεί να ένωνε δύο σύνολα από 4 και 3 κουμπάκια το καθένα, αλλά όταν μετρούσε το άθροισμά τους να τα έβγαζε 8. γ) Σε αυτά που δεν απάντησαν ή που «μάντεψαν», όπως έλεγαν την απάντηση, δίνοντας ένα τυχαίο αριθμό ή που υιοθέτησαν λάθος τρόπο επίλυσης, π.χ. πρόσθεσαν αντί να αφαιρέσουν (Πίνακας 2).

Πίνακας 2

Συχνότητες και ποσοστά επίδοσης ανά τύπο προβλήματος

	Κατηγορίες επίδοσης		
Τύπος προβλήματος	*α*	*β*	*γ*
Αλλαγής	f %	f %	f %
Ένωσης με άγνωστο το άθροισμα	52 (86%)	7 (12%)	1 (2%)
Διαχωρισμού με άγνωστη την τελική κατάσταση	54 (90%)	3 (5%)	3 (5%)
Συνδυασμού			
Άγνωστη η τιμή του συνδυασμού	54 (90%)	4 (7%)	2 (3%)
Άγνωστος το ένα υποσύνολο			
Παραλλαγή α΄	19 (32%)	-	41 (68%)
Παραλλαγή β΄	39 (65%)	-	21 (35%
Σύγκρισης			
Παραλλαγή α΄	8 (13%)	1 (2%)	51 (85%)
Παραλλαγή β΄	53 (88%)	-	7 (12%)
Εξομοίωσης-Ένωσης	30 (50%)	6 (10%)	24 (40%)
Πολλαπλασιασμού – ίσων ομάδων	37 (62%)	2 (3%)	21 (35%)
Διαίρεσης μερισμού	41 (68%)	3 (5%)	16 (27%)
Διαίρεσης μέτρησης	33 (55%)	3 (5%)	24 (40%)

Τα ποσοστά επίδοσης των παιδιών δείχνουν ότι τα προβλήματα προσθετικού τύπου ήταν πιο εύκολα στην επίλυσή τους από τα προβλήματα πολλαπλασιαστικού τύπου. Συγκεκριμένα, τα προβλήματα αλλαγής και συνδυασμού με άγνωστη την τιμή του συνδυασμού επιλύθηκαν σωστά από την πλειονότητα των παιδιών. Αν μάλιστα λάβουμε υπόψη μας και τα παιδιά της κατηγορίας β΄, τότε θα λέγαμε ότι όλα σχεδόν τα παιδιά της ηλικίας αυτής αντιμετωπίζουν χωρίς δυσκολία τέτοιου είδους προβλήματα.

Χαρακτηριστική ήταν η διαφορά επίδοσης των νηπίων στην παραλλαγή α' και β' στα συνδυαστικά προβλήματα με άγνωστο το ένα υποσύνολο. Το τεστ McNemar έδειξε ότι το πρόβλημα με την επεξηγηματική διατύπωση ήταν σημαντικά πιο εύκολο ($p<.0001$).

Η επίδοση των παιδιών επηρεάστηκε από τη διατύπωση του προβλήματος και στα προβλήματα σύγκρισης. Το τεστ McNemar έδειξε ότι η δεύτερη παραλλαγή ήταν σημαντικά ευκολότερη ($p<.0001$).

Τα προβλήματα εξομοίωσης-ένωσης ήταν πιο δύσκολα, αν και το 60% του δείγματος ακολούθησε μια σωστή μέθοδο επίλυσης.

Όσον αφορά τα προβλήματα πολλαπλασιαστικού τύπου, το ποσοστό επιτυχίας των νηπίων παρέμεινε υψηλό, αν και αισθητά χαμηλότερο από εκείνο των προσθετικών προβλημάτων. Το 62% των νηπίων έλυσε με επιτυχία τα προβλήματα πολλαπλασιασμού. Υψηλά ήταν τα ποσοστά επιτυχίας και στα προβλήματα διαίρεσης. Το τεστ McNemar έδειξε ότι η επίδοση των νηπίων στα προβλήματα μερισμού ήταν υψηλότερη από την επίδοσή τους στα προβλήματα μέτρησης ($p<.04$).

Ποιοτική Ανάλυση

Για να κατανοήσουμε καλύτερα τον τρόπο σκέψης των παιδιών, θεωρήσαμε απαραίτητο να μελετήσουμε πώς τα παιδιά έφτασαν στην επίλυση των προβλημάτων. Η ανάλυση των διαδικασιών επίλυσης έδειξε ότι αυτές μπορούν να καταταχθούν στις εξής κατηγορίες:

α. Διαδικασίες άμεσης μοντελοποίησης (direct modeling)

Τα νήπια που υιοθέτησαν αυτή τη μέθοδο λύσης αναπαράστησαν τις ποσότητες που δίδονταν στο πρόβλημα με τα κουμπάκια ή με τα δακτυλάκια τους και επενέργησαν σε αυτές, όπως ακριβώς περιγράφονταν σε αυτό. Για παράδειγμα, στο πρόβλημα «Η Μαρία έχει 6 καραμέλες. Ο Γιάννης τής έδωσε άλλες 2. Πόσες καραμέλες έχει τώρα η Μαρία;» η πλειονότητα των νηπίων σχημάτισε ένα σύνολο από 6 κουμπάκια, ένα ξεχωριστό σύνολο από 2 κουμπάκια, τα ένωσε και μέτρησε το συνολικό αριθμό τους. Στη στρατηγική αυτή τα κουμπιά αναπαριστούν τις καραμέλες και οι ενέργειες που πραγματοποιούνται εικονίζουν τις δραστηριότητες που περιγράφονται στο πρόβλημα.

Οι Nunes & Bryant (1996: 115) σημειώνουν ότι η μέθοδος αυτή, όσο και αν φαίνεται ότι περιορίζεται στο συγκεκριμένο, εντούτοις εμπεριέχει κάποιο βαθμό αφαίρεσης, αφού το παιδί κατανοεί ότι το αποτέλεσμα με τα κουμπάκια θα είναι το ίδιο όπως αυτό με τις καραμέλες.

β. Αριθμητικές διαδικασίες

Στην περίπτωση αυτή τα νήπια, χωρίς να χρησιμοποιούν τα κουμπάκια ή τα δάκτυλά τους με εμφανή τρόπο, απαρίθμησαν είτε από μέσα τους είτε φωναχτά τις ποσότητες του προβλήματος. Για παράδειγμα, στο παραπάνω πρόβλημα αλλαγής-ένωσης, όταν το νήπιο ερωτούνταν πώς βρήκε τη λύση, έλεγε ότι μέτρησε: 1, 2, ...8! Η αρίθμηση μπορεί να γίνεται με ποικίλους τρόπους. Κάποια παιδιά ενδέχεται να μετρούν ανά ένα, άλλα με πολλαπλάσια αριθμών (2, 4, 6, 8!) και άλλα να χρησιμοποιούν επαναλαμβανόμενη πρόσθεση (2+2=4, 4+2=6, 6+2=8). Ο τρόπος με τον οποίο θα γίνει η αρίθμηση εξαρτάται συχνά από το είδος του προβλήματος. Η αρίθμηση με πολλαπλάσια ή με επαναλαμβανόμενη πρόσθεση απαντάται συχνότερα στα προβλήματα πολλαπλασιασμού.

γ. Νοερές διαδικασίες

Άμεση ανάκληση γνωστών πράξεων

Τα νήπια που ακολούθησαν αυτή τη διαδικασία λύσης είχαν κατανοήσει και απομνημονεύσει τα αποτελέσματα κάποιων βασικών πράξεων. Έτσι, στο παραπάνω πρόβλημα αλλαγής-ένωσης, όταν ρωτιόταν το νήπιο πώς βρήκε τη λύση, έλεγε ότι 6+2 κάνει 8!

Τα ποσοστά του Πίνακα 3 δείχνουν ότι η πιο συχνή μέθοδος επίλυσης των προβλημάτων ήταν αυτή της άμεσης μοντελοποίησης. Τα νήπια που έλυσαν τα προβλήματα υιοθέτησαν κάποια από τις παραπάνω μεθόδους, ενώ εκείνα που απέτυχαν είτε επανέλαβαν κάποιον όρο του προβλήματος ή απάντησαν «δεν ξέρω» ή ακολούθησαν λανθασμένο τρόπο επίλυσης.

Πίνακας 3

Κατανομή μεθόδων επίλυσης ανά τύπο προβλήματος

	Μέθοδοι επίλυσης				
	Επιτυχείς[1]			Αποτυχείς[2]	
Τύπος προβλήματος	Άμεση μοντελοποίηση	Διαδικασίες αρίθμησης	Νοερές διαδικασίες	Επανάληψη όρων	«Δεν ξέρω» κ.τ.λ.
Αλλαγής	f %	f %	f %	f %	f %
Ένωσης με άγνωστο το άθροισμα	45 (75%)	8 (13%)	6 (10%)	-	1 (2%)
Διαχωρισμού με άγνωστη την τελική κατάσταση	48 (80%)	5 (8%)	6 (10%)	-	1 (2%)
Συνδυασμού					
Άγνωστη η τιμή του συνδυασμού	47 (78%)	2 (3%)	9 (15%)	1 (2%)	1 (2%)
Άγνωστος το ένα υποσύνολο					
Παραλλαγή α΄	18 (30%)	-	1 (2%)	15 (25%)	26 (43%)
Παραλλαγή β΄	38 (63%)	-	1 (2%)	14 (23%)	7 (12%)
Σύγκρισης					
Παραλλαγή α΄	5 (9%)	-	2 (3%)	48 (80%)	5 (8%)
Παραλλαγή β΄	45 (75%)	7 (12%)	-	3 (5%)	5 (8%)
Εξομοίωσης-Ένωσης	29 (48%)	3 (5%)	4 (6%)	16 (27%)	8 (13%)
Πολλαπλασιασμού – ίσων ομάδων	30 (50%)	6 (10%)	2 (4%)	16 (27%)	6 (10%)
Διαίρεσης μερισμού	44 (74%)	-	-	2 (3%)	14 (23%)
Διαίρεσης μέτρησης	35 (58%)	-	-	13 (22%)	12 (20%)

1. Οι μέθοδοι αυτοί υιοθετήθηκαν από τα νήπια της κατηγορίας α΄ και β΄ του Πίνακα 2.
2. Οι μέθοδοι αυτοί υιοθετήθηκαν από τα νήπια της κατηγορίας γ΄ του Πίνακα 2.

4. Συζήτηση και συμπεράσματα

Τα αποτελέσματα της μελέτης δίνουν μια ιδιαίτερα θετική εικόνα για την ικανότητα επίλυσης προβλημάτων των νηπίων. Εντυπωσιακή ήταν η επίδοση των παιδιών στα προβλήματα προσθετικού τύπου. Το ιδιαίτερα υψηλό ποσοστό απόδοσης στα προβλήματα σύνδυασμού και ένωσης φανερώνει ότι οι δύο αυτοί τύποι προβλημάτων είναι της ίδιας δυσκολίας, παρόλο που τα προβλήματα συνδυασμού περιγράφουν μια στατική σχέση ανάμεσα στους όρους του προβλήματος και τα προβλήματα ένωσης μια ενέργεια που προκαλεί αύξηση σε μία ποσότητα. Τα προβλήματα συνδυασμού με άγνωστο το ένα υποσύνολο, ακόμα και στην επεξηγηματική τους εκφώνηση, ήταν πιο δύσκολα για τα νήπια από τα προβλήματα διαχωρισμού. Η διαφορά επίδοσης στα δύο αυτά προβλήματα είχε βρεθεί και στη μελέτη του Riley (1981, στο Riley et al. 1983: 163). Αν μόνο η ικανότητα επιλογής και εκτέλεσης μιας πράξης καθόριζε την επίδοση των παιδιών, τότε η επίδοσή τους στα δύο αυτά προβλήματα θα ήταν συγκρίσιμη, αφού και τα δύο λύνονται με αφαίρεση. Όμως, όπως τονίζουν και οι Riley et al.

(1983: 162), η σημασιολογική δομή του προβλήματος επηρεάζει σημαντικά το βαθμό δυσκολίας του.

Ο καθοριστικός ρόλος της λεκτικής διατύπωσης του προβλήματος στην επίδοση των παιδιών φάνηκε από την επίδραση των επεξηγηματικών εκφωνήσεων. Στα προβλήματα συνδυασμού με άγνωστο το υπόλοιπο η επεξηγηματική διατύπωση, η οποία τόνιζε τις σχέσεις μέρους-μέρους-όλου, είχε ως αποτέλεσμα την καλύτερη κατανόηση του προβλήματος και την ακόλουθη αύξηση του ποσοστού επιτυχίας. Στα δε προβλήματα σύγκρισης η διαφορά επίδοσης ανάμεσα στην κανονική και επεξηγηματική διατύπωση δείχνει ότι τα παιδιά δεν στερούνται στρατηγικής. Η στρατηγική όμως αυτή, όπως υπογραμμίζουν οι Riley et al. (1983: 173), θα αναδυθεί μόνο όταν το παιδί κατανοήσει τις σχέσεις ανάμεσα στους όρους του προβλήματος και τις συνδέσει με τις διαδικασίες λύσης που κατέχει. Κατά τους Nunes & Bryant (1996: 130), τα προβλήματα σύγκρισης είναι δύσκολα, γιατί περιγράφουν στατικές σχέσεις ανάμεσα στους όρους. Στη διατύπωση του προβλήματος δεν υποδηλώνεται καμία ενέργεια πρόσθεσης ή αφαίρεσης στα δύο σύνολα. Επομένως το παιδί δεν μπορεί εύκολα να καταλάβει πώς πρέπει να οργανώσει τις ενέργειές του.

Στα προβλήματα εξομοίωσης-ένωσης το ποσοστό επιτυχίας των νηπίων ήταν χαμηλότερο, παρόλο που ένα ποσοστό 60% ακολούθησε μια σωστή μέθοδο επίλυσης. Τα προβλήματα αυτά συνδυάζουν στοιχεία των προβλημάτων σύγκρισης και ένωσης ή διαχωρισμού (Carpenter & Moser 1982: 11). Χαρακτηριστικό ήταν ότι η επίδοση των παιδιών στο πρόβλημα αυτό ήταν υψηλότερη από την επίδοσή τους στο απλό πρόβλημα σύγκρισης. Και αυτό γιατί, πέρα από τη σχέση ανάμεσα στους συγκρινόμενους όρους, το πρόβλημα εξομοίωσης δηλώνει και μια ενέργεια αύξησης, που πρέπει να συντελεστεί στον έναν όρο, για να εξισωθεί με τον άλλο. Η ερώτηση «πόσα αυτοκινητάκια πρέπει να αγοράσει η μαμά στο Χρήστο» βοηθάει το παιδί να καταλάβει ότι, για να φτάσει στη λύση, πρέπει να επενεργήσει στη μια ποσότητα και να την αυξήσει.

Τα προβλήματα πολλαπλασιασμού και διαίρεσης ήταν εντός του πλαισίου των δυνατοτήτων των περισσότερων από τα μισά νηπίων. Τα νήπια φαίνεται να κατέχουν τις σχέσεις πολλαπλής αντιστοιχίας στον πολλαπλασιασμό και να εφαρμόζουν σωστά το σχήμα δράσης του μερισμού στη διαίρεση.

Η επίδοση των νηπίων στα προβλήματα πολλαπλασιασμού και διαίρεσης μέτρησης ήταν χαμηλότερη από την επίδοση των νηπίων της μελέτης των Carpenter et al. (1993). Η διαφορά όμως αυτή ήταν αναμενόμενη, καθότι τα