

ΑΙΚΑΤΕΡΙΝΗ Ν. ΚΟΡΝΗΛΑΚΗ

Η κατανόηση των κλασματικών σχέσεων στο πλαίσιο του μερισμού συνεχών ποσοτήτων

Περίληψη

Αν και τα παιδιά δεν έχουν δυσκολίες να μοιράσουν ασυνεχείς ποσότητες, εντούτοις αντιμετωπίζουν δυσκολίες στο μερισμό συνεχών ποσοτήτων. Η μελέτη εξετάζει την υπόθεση ότι, ακόμα και αν τα παιδιά δεν μπορούν να διαιρέσουν συνεχείς ποσότητες, ενδέχεται να κατανοούν τις σχέσεις μεταξύ των διαιρετικών όρων. Σε 20 παιδιά μέσης ηλικίας 5;9 ετών δόθηκαν δύο δραστηριότητες. Στη μία από αυτές τους ζητήθηκε να συγκρίνουν τα πηλίκα δύο διαιρέσεων και να αποφανθούν πότε θα κατέληγαν σε μεγαλύτερο πηλίκο (π.χ. όταν 2 ή 4 κούκλες μοιράζονταν ένα κέικ). Στην άλλη τους ζητήθηκε να εκτελέσουν τη διαίρεση. Βρέθηκε ότι, ακόμα και όταν τα παιδιά δεν μπορούσαν να εκτελέσουν τη διαίρεση, μπορούσαν να προβλέψουν ποια διαίρεση θα κατέληγε σε μεγαλύτερο αποτέλεσμα. Αυτό σημαίνει ότι η κατανόηση κλασματικών εννοιών ξεκινά νωρίτερα από την εκτέλεση κλασματικών διαιρέσεων. Τα αποτελέσματα βρίσκονται σε συμφωνία με την υπόθεση των Ritter-Johnson & Singer (1998), ότι δηλαδή η κατανόηση μαθηματικών σχέσεων ενδέχεται να προηγείται της ικανότητας εκτέλεσης των ανάλογων πράξεων, όταν αυτές οι έννοιες απαντώνται στις καθημερινές δραστηριότητες του παιδιού, αλλά εισάγονται αργά στο σχολείο.

Summary

The study investigates young childrens understanding of sharing relations in the context of fractional problems. Twenty children (mean age 5;9) were examined in two conditions. Condition A examined whether the children were able to understand the inverse relation between the divisor and the quotient in the context of partitive division problems when asked to judge the relative size of the shared quantities. Condition B examined childrens ability to share a continuous quantity (a cake) among a number of recipients. It was found that the majority of children had no difficulty to reflect on the inverse divisor-quotient relation and judge that, the more sharing the less each would get, even if they were not able to share the actual quantity. The findings of the study are in accordance to Ritter-Johnson & Singer (1998) hypothesis on the distinction between conceptual and procedural knowledge.

ΕΙΣΑΓΩΓΗ

Το αναλυτικό πρόγραμμα των πρώτων τάξεων του δημοτικού σχολείου βασίζεται στη διδασκαλία των φυσικών αριθμών. Οι κλασματικοί αριθμοί θεωρούνται δύσκολοι, γι' αυτό και εισάγονται αργότερα, όταν πια τα παιδιά έχουν αποκτήσει ευχέρεια με τους φυσικούς αριθμούς και τις τέσσερις αριθμητικές πράξεις. Δεν είναι δε λίγοι αυτοί (Behr, Wachsmuth, Post & Lesh, 1984. Streetland, 1984) που θεωρούν ότι η καθυστέρηση αυτή επαυξάνει τη δυσκολία των κλασματικών αριθμών, γιατί τα γνωστικά σχήματα που έχουν τα παιδιά για τους φυσικούς αριθμούς εδραιώνονται και παρεμβαίνουν στην κατανόηση των κλασμάτων.

Ενδέχεται όμως τα παιδιά να κατανοούν κλασματικές έννοιες πολύ προτού αυτές εισαχθούν στο σχολείο. Και αυτό, γιατί κατά τον Kieren (1994) οι κλασματικοί αριθμοί είναι παράγωγα της διαίρεσης, και κυρίως της διαίρεσης συνεχών ποσοτήτων, έννοιες τις οποίες τα παιδιά αναπτύσσουν σε μικρή ηλικία (Correa, 1995. Correa, Nunes & Bryant, 1998. Frydman & Bryant, 1988. Kornilaki, 1999. Kornilaki & Nunes, 1997. Sophian, Garyantes & Chang, 1997). Έτσι, για παράδειγμα, το κλάσμα $1/4$ γίνεται κατανοητό ως το πηλίκο της διαίρεσης ενός μήλου ανάμεσα σε τέσσερα παιδιά. Αν η πρόταση του Kieren είναι αληθής, τότε οι απαρχές κατανόησης των κλασμάτων θα πρέπει να αναζητηθούν στη διαίρεση των συνεχών ποσοτήτων.

Είναι γνωστό ότι τα παιδιά ηλικίας 4 με 5 ετών ασχολούνται με δραστηριότητες σχετικές με τη διαίρεση, όπως αυτή του μοιράσματος αντικειμένων, για να καταλήξουν όλοι οι αποδέκτες με ίσα μερίδια (Davis & Pepper, 1992. Davis & Pitkethly, 1990. Desforges & Desforges, 1980. Frydman & Bryant, 1988. Hunting & Davis, 1991). Οι Frydman & Bryant (1988) έδειξαν ότι τα παιδιά μπορούν να μοιράζονται με ακρίβεια μεταξύ τους αντικείμενα, ακόμα και όταν μοιράζουν άνισες ποσότητες. Φαίνεται λοιπόν ότι το μοίρασμα ασυνεχών ποσοτήτων δεν παρουσιάζει ιδιαίτερες δυσκολίες και ότι το σχήμα δράσης που έχουν τα παιδιά – ένα για τον Α, ένα για τον Β, ένα για τον Α κ.ο.κ – είναι επαρκές για να σχηματίσουν ίσα μερίδια.

Στο μοίρασμα όμως των συνεχών ποσοτήτων, που συνδέεται με τους κλασματικούς αριθμούς, τα παιδιά δεν είναι και τόσο επιτυχή. Πρώτοι οι Piaget, Inhelder & Szeminska (1960) μελέτησαν πώς τα παιδιά μοιράζουν συνεχείς ποσότητες, όπως για παράδειγμα ένα κέικ σε δύο, τρεις, τέσσερις, πέντε ή έξι κούκλες. Οι έρευνές τους έδειξαν ότι παιδιά ηλικίας 4;0 με 4;5 ετών δυσκολεύονται να μοιράσουν το κέικ ακόμα και σε δύο μέρη. Συνήθως κόβουν δύο μικρά κομμάτια, τις περισσότερες φορές άνισα, και τα δίνουν στις κούκλες, χωρίς να μοιράζουν ολόκληρη την ποσότητα. Συχνά μπερδεύουν τον αριθμό των τομών που πρέπει να φέρουν με τον αριθμό των αποδεκτών. Έτσι, όταν οι αποδέκτες είναι δύο, τα παιδιά ενδέχεται να κάνουν δύο τομές αντί μία. Οι δυσκολίες των παιδιών είναι ακόμα μεγαλύτερες, όταν έχουν να μοιράσουν μια ποσότητα σε τέσσερις κούκλες. Οι Piaget, Inhelder & Szeminska (1960) παρατήρησαν ότι τα παιδιά αρχίζουν να κόβουν κομμάτια,

χωρίς να ξέρουν πότε πρέπει να σταματήσουν. Συχνά ένα μεγάλο μέρος του κέικ μένει αμοιραστο. Η δυσκολία που έχουν τα παιδιά οφείλεται, κατά τους Piaget et al., στο γεγονός ότι τα παιδιά δεν έχουν συντονίσει ακόμα τις σχέσεις μέρους-όλου, ότι δηλαδή τα δύο μέρη είναι ίσα με το αρχικό, και τις σχέσεις μέρους-μέρους, ότι δηλαδή τα δύο μισά είναι ίσα μεταξύ τους. Στο επόμενο στάδιο, κατά την ηλικία των 5 με 6 ετών, τα παιδιά δεν έχουν ιδιαίτερο πρόβλημα στη διχοτόμηση μιας ποσότητας. Αρκετά μάλιστα παιδιά καταφέρουν να μοιράσουν, για παράδειγμα, ένα κέικ στα τέσσερα με διπλή διχοτόμηση. Όμως, η τριχοτόμηση ή η τομή του στα πέντε φαίνεται να είναι αδύνατη. Στην ηλικία των 6 με 7 ετών περίπου επιτυγχάνεται η τριχοτόμηση του παραλληλόγραμμου κέικ. Όμως, όταν το κέικ είναι στρογγυλό, το παιδί μπορεί να βρει τη σωστή λύση μόνο με τη μέθοδο της δοκιμής και πλάνης. Στην ηλικία πια των 7 ετών το παιδί βρίσκεται στο στάδιο των συγκεκριμένων διανοητικών λειτουργιών και κατανοεί τις σχέσεις μέρους-όλου και μέρους-μέρους, επιτυγχάνει την τριχοτόμηση και αργότερα γενικεύει τη γνώση του για να μοιράσει μια ποσότητα σε πέντε και έξι μέρη.

Οι έρευνες που ακολούθησαν στην δεκαετία του '80 για το μοιρασμα συνεχών ποσοτήτων (Hiebert & Tonnesen, 1978. Hunting & Sharpley, 1988. Pothier & Secada, 1983) σε μεγάλο βαθμό δεν κατάφεραν τίποτα άλλο παρά να επαληθεύσουν σε γενικές γραμμές την πορεία ανάπτυξης που παρατήρησαν αρχικά οι Piaget et al (1960). Η δυσκολία, την οποία παρουσιάζει η διαίρεση των συνεχών ποσοτήτων σε σχέση με τις ασυνεχείς, έγκειται στο ότι με τις ασυνεχείς ποσότητες το παιδί δεν έχει παρά να μοιράσει, για παράδειγμα, τις καραμέλες του ανά ένα διαδοχικά στον κάθε αποδέκτη. Όταν όμως το παιδί έχει να μοιράσει μια συνεχή ποσότητα, πρέπει να έχει εκ των προτέρων ένα σχήμα για το ποιες και πόσες τομές θα πρέπει να φέρει και πού (an anticipation schema). Πρέπει να τονιστεί όμως ότι, παρά τις δυσκολίες που έχουν τα παιδιά με τις κλασματικές ποσότητες, η ικανότητά τους να μοιράζουν συνεχείς ποσότητες προηγείται κατά πολύ της εισαγωγής των κλασμάτων στο σχολικό πρόγραμμα.

Αξίζει να σημειωθεί ότι όλες οι έρευνες για τη διαίρεση συνεχών ποσοτήτων επικεντρώνονται στο κατά πόσο τα παιδιά έχουν την ικανότητα να εκτελούν σωστά τη διαίρεση. Το ότι τα μικρά παιδιά αποτυγχάνουν να εκτελέσουν σωστά τη διαίρεση, δεν σημαίνει ότι δεν κατανοούν τίποτα για τα κλάσματα. Ενδέχεται τα παιδιά να κατανοούν τις σχέσεις ανάμεσα στο διαιρέτο, το διαιρέτη και το πηλίκο, πριν μπορέσουν να οργανώσουν τις ενέργειές τους, για να καταλήξουν στο σωστό αποτέλεσμα. Με άλλα λόγια, το παιδί μπορεί να έχει την προσδοκία ότι, όταν το κέικ μοιράζεται στα τρία, τα μερίσματα θα είναι μεγαλύτερα από ό,τι θα ήταν αν το κέικ μοιραζόταν στα πέντε, αλλά να μην ξέρει πώς να οργανώσει τη διαδικασία του μοιρασμάτος, για να καταλήξει στο επιθυμητό αποτέλεσμα.

Η ικανότητα των παιδιών να κατανοούν μαθηματικές σχέσεις και έννοιες (conceptual knowledge), πριν μπορέσουν να τις εκφράσουν ποσοτικά (procedural knowledge), έχει διαπιστωθεί σε ένα πλήθος ερευνών (Ahl, Moore & Dixon, 1992. Byrnes & Wasik, 1991. Dixon & Moore, 1996.). Οι Ritter-Johnson & Siegler (1998)

θεωρούν ότι αυτό είναι ιδιαίτερα πιθανό στις περιπτώσεις που οι διαδικασίες, που εμπλέκονται για την ποσοτική έκφραση ενός αποτελέσματος, είναι πολύπλοκες και αργούν να εισαχθούν στο σχολείο, όπως ακριβώς συμβαίνει με τη διαίρεση συνεχών ποσοτήτων.

Η έρευνα αυτή έχει ως στόχο τη μελέτη της εικόνας που έχουν τα παιδιά για το αναμενόμενο κλασματικό αποτέλεσμα με βάση την αντίστροφη σχέση διαιρέτη-πηλίκου, πριν αποκτήσουν την ικανότητα να εκτελούν σωστά τη διαίρεση των συνεχών ποσότητας. Για το λόγο αυτό, η επίδοση των παιδιών θα αξιολογηθεί σε προβλήματα με συνεχείς ποσότητες, στα οποία α) θα συγκρίνονται αναμενόμενα πηλίκα δύο διαιρέσεων με βάση τις σχέσεις ανάμεσα στους διαιρετικούς όρους και β) θα εκτελούν τη διαίρεση, για να βρίσκουν το πηλίκο.

ΜΕΘΟΔΟΛΟΓΙΑ

Τα υποκείμενα

Στην έρευνα έλαβαν μέρος είκοσι παιδιά (11 κορίτσια και 9 αγόρια) μέσης ηλικίας 5;9 ετών (εύρος ηλικίας από 5;5 έως 5;11 ετών), που παρακολουθούσαν την προδημοτική τάξη ενός δημόσιου σχολείου στο Κεντρικό Λονδίνο.

To υλικό

Το υλικό της έρευνας αποτελούσαν 10 κυκλικά κέικ φτιαγμένα από μαλακό πηλό, 1 ξύλινο μαχαιράκι και 12 μικρές κούκλες.

Ο σχεδιασμός

Η μελέτη χωριζόταν σε δύο μέρη. Το πρώτο μέρος εξέταζε κατά πόσο τα παιδιά μπορούσαν να συγκρίνουν τα πηλίκα διαφορετικών διαιρέσεων με βάση την αντίστροφη σχέση διαιρέτη-πηλίκου και να κρίνουν πότε θα ήταν μεγαλύτερο (όταν για παράδειγμα 2 ή 3 κούκλες θα μοιράζονταν ένα κέικ). Στο δεύτερο μέρος ζητήθηκε από τα παιδιά να εκτελέσουν τη διαίρεση μοιράζοντας το κέικ στις κούκλες.

Συνολικά δόθηκαν σε κάθε παιδί τέσσερις τέτοιες συγκρίσεις και τέσσερις διαιρέσεις. Τα μισά παιδιά άρχισαν το πείραμα κάνοντας τη σύγκριση ανάμεσα στα πηλίκα, ενώ τα άλλα μισά εκτελώντας τις διαιρέσεις. Τα προβλήματα δόθηκαν ανακατεμένα και σε τυχαία σειρά. Ο διαιρετέος ήταν πάντα το 1, γιατί, σύμφωνα με τους Goldblatt & Raymond (1996), τα παιδιά κατανοούν τα κλάσματα πιο εύκολα, όταν έχουν να μοιράσουν μια συνεχή ποσότητα σε ίσα μέρη. Ως διαιρέτες στη συνθήκη που τα παιδιά έπρεπε να εκτελέσουν τη διαίρεση επιλέγησαν: α) ο αριθμός 2, γιατί κατά τους Piaget et al. (1960) και Miller (1984) η διχοτόμηση μιας ποσότητας και η έννοια του μισού αναπτύσσεται πιο νωρίς, β) ο αριθμός 4, γιατί ο χωρισμός μιας ποσότητας σε τέσσερα μέρη μπορεί να επιτευχθεί εύκολα με δύο διχοτομήσεις, γ) ο αριθμός 3, για να επαληθευτεί η υπόθεση ότι η τριχοτόμηση αναπτύσσεται τελευταία και δ) ο αριθμός 8, γιατί απαιτεί διαδοχικές διχοτομήσεις.

Οι ίδιοι διαιρέτες δόθηκαν και στη συνθήκη σύγκρισης των πηλίκων. Σε μερικά ζεύγη η αριθμητική διαφορά ανάμεσα στους διαιρέτες ήταν μικρή (1:2 με 1:3), ενώ σε άλλα ζεύγη ήταν μεγαλύτερη (1:4 με 1:8). Αυτή η διαφορά δεν αναμενόταν να επηρεάσει την επίδοση των παιδιών, όπως έχει βρεθεί επανειλημμένως από διάφορες έρευνες (Kornilaki & Nunes, 1997. Sophian, Garyantes & Chang, 1997).

Ο σχεδιασμός της έρευνας φαίνεται στον πίνακα 1.

Πίνακας 1

Οι πειραματικές συνθήκες

Σύγκριση κλασματικών πηλίκων	Εκτέλεση διαιρέσεων
1 : 2 με 1 : 3	1 : 2
1 : 2 με 1 : 4	1 : 3
1 : 3 με 1 : 8	1 : 4
1 : 4 με 1 : 8	1 : 8

Η διαδικασία

Η εξέταση κάθε παιδιού έγινε ατομικά στο χώρο της βιβλιοθήκης του σχολείου. Ο εξεταστής είπε στα παιδιά μια μικρή ιστορία για τις κούκλες, που πήγαν για πικνίκ και πήραν μαζί τους ένα νόστιμο κέικ σοκολάτας. Στην περίπτωση που τα παιδιά είχαν να συγκρίνουν τα κλασματικά πηλίκα, ο εξεταστής έδειξε στα παιδιά τις δύο ομάδες από κούκλες που διέφεραν μόνο ως προς τον αριθμό τους. Οι κούκλες κάθισαν γύρω από το κέικ και ο εξεταστής είπε ότι θα το μοιραζαν όλο και δίκαια μεταξύ τους. Το παιδί έπρεπε να σκεφτεί ποιες κούκλες θα έτρωγαν περισσότερο κέικ.

Στη δεύτερη πειραματική συνθήκη, που το παιδί έπρεπε να μοιράσει το κέικ, ο εξεταστής του έδωσε ένα ξύλινο μαχαιράκι και του ζήτησε να το μοιράσει όλο στις κούκλες. Τονίστηκε ιδιαίτερα ότι όλες οι κούκλες έπρεπε να πάρουν την ίδια ποσότητα και να μην περισσέψει κέικ στο δίσκο. Ζητήθηκε από το παιδί να μην βιαστεί και να σκεφτεί πώς θα κάνει την μοιρασιά, προτού αρχίσει να κόβει το κέικ. Αν το παιδί δεν έμενε ευχαριστημένο από την πρώτη προσπάθεια μερισμού που έκανε, μπορούσε να πάρει ένα άλλο κέικ και να προσπαθήσει ξανά.

Αποτελέσματα

Για κάθε σωστή απάντηση τα παιδιά έπαιρναν ένα βαθμό. Οι βαθμοί σε κάθε συνθήκη κυμαίνονταν από 0 έως 4, μια και σε κάθε συνθήκη το παιδί απάντησε 4 ερωτήσεις.

Πίνακας 2

Η κατανομή της βαθμολογίας των παιδιών στις δύο συνθήκες

Συνθήκες	Βαθμολογία				
	0	1	2	3	4
Σύγκρισης πηλίκων	8	2	1	—	9
Διαίρεσης ποσοτήτων	8	7	5	—	—

Όπως φαίνεται στον πίνακα 2, στη συνθήκη σύγκρισης των πηλίκων τα περισσότερα παιδιά απάντησαν όλες τις ερωτήσεις σωστά ή λάθος. Αυτό σημαίνει ότι τα παιδιά είχαν μια συγκεκριμένη λογική που εφάρμοζαν, για να απαντήσουν στα προβλήματα, και δεν έδιναν απαντήσεις στην τύχη. Το 45% των παιδιών ανέμενε ότι το μεγαλύτερο μερίδιο θα το έπαιρναν οι κούκλες που μοιράζονταν το κέικ με τις λιγότερες κούκλες.

Όταν ζητήθηκε από τα ίδια παιδιά να κάνουν τη διαίρεση και να μοιράσουν το κέικ στις κούκλες, η επίδοσή τους διέφερε ανάλογα με το μέγεθος του διαιρέτη.

Συνολικά 12 παιδιά μοίρασαν χωρίς δυσκολία το κέικ σε δύο περίπου ίσα μέρη με διχοτόμηση. Ήταν χαρακτηριστικό ότι 3 από τα παιδιά που διχοτόμησαν το κέικ προσπάθησαν να ελέγχουν την ισότητα των μεριδίων βάζοντας το ένα κομμάτι πάνω στο άλλο.

Χαρακτηριστικό των πεντάχρονων παιδιών, που απέτυχαν στη διχοτόμηση, ήταν ότι έκοβαν κομμάτια και τα μοίραζαν στις κούκλες, χωρίς να ελέγχουν την ισότητά τους. Κατά κάποιον τρόπο, τα παιδιά αυτά προσπάθησαν να μετατρέψουν το κέικ από συνεχή σε ασυνεχή ποσότητα και να κάνουν το μοίρασμα με βάση το σχήμα δράσης ένα για τον Α, ένα για τον Β, ένα για τον Α, κ.ο.κ. Δύο από τα πέντε παιδιά που ακολούθησαν αυτή την τακτική διαπίστωσαν ότι, στο τέλος, η μία κούκλα είχε μεγαλύτερο μερίδιο, και άρχισαν να κάνουν προσθαφαιρέσεις, για να εξισορροπηθούν τα μερίδια. Τρία παιδιά έκοψαν δύο τυχαία κομμάτια και τα έδωσαν στις κούκλες, χωρίς να μοιράσουν το υπόλοιπο κέικ, παρόλο που τους ζητήθηκε να το μοιράσουν όλο.

Μόνο πέντε από τα παιδιά κατάφεραν να μοιράσουν το κέικ στα τέσσερα φέρνοντας δύο κάθετες διχοτόμους. Και τα πέντε αυτά παιδιά είχαν πετύχει στη διαίρεση του κέικ στα δύο. Τα περισσότερα από τα παιδιά που απέτυχαν άρχισαν να κόβουν τυχαία το κέικ και να μοιράζουν τα κομμάτια, με αποτέλεσμα κάθε κούκλα να έχει διαφορετική ποσότητα από την άλλη. Κανένα όμως παιδί δεν κατάφερε να χωρίσει το κέικ σε τρία ή οκτώ ίσα μέρη. Η τριχοτόμηση ήταν ιδιαίτερα δύσκολη, κυρίως γιατί τα περισσότερα παιδιά άρχιζαν διχοτομώντας το κέικ. Από εκεί και πέρα ήταν αδύνατο να σχηματίσουν τρία ίσα μέρη, παρόλο που επέμειναν στις προσπάθειές τους με τη μέθοδο της δοκιμής και πλάνης.

Συγκρίνοντας την επίδοσή των παιδιών στις δραστηριότητες σύγκρισης των πηλίκων και εκτέλεσης της διαιρεσής, παρατηρούμε ότι η επίδοσή τους στις δραστηριότητες σύγκρισης ήταν ανεξάρτητη από το μέγεθος του διαιρέτη. Ένας σημαντικός αριθμός παιδιών κατανοούσε ότι, όταν μεγάλωνε το μέγεθος του διαιρέτη, θα μίκραινε το μέγεθος του πηλίκου. Όμως, όταν τα παιδιά αυτά καλούνταν να υπολογίσουν το μέγεθος αυτού του πηλίκου, δεν μπορούσαν να βρουν κάποιον τρόπο για να σχηματίσουν ίσα μερίδια. Εξαίρεση αποτελούσε μόνο το μοιρασμα στα δύο, που τα περισσότερα παιδιά το κατάφεραν εύκολα. Τα παιδιά πέτυχαν ακόμα και στις συγκρίσεις πηλίκων, που δεν μπορούσαν να διαιρέσουν. Έτσι, από τα εννέα παιδιά που πέτυχαν σε όλες τις δραστηριότητες σύγκρισης, μόνο πέντε κατάφεραν να μοιράσουν το κέικ στα δύο και στα τέσσερα, αλλά όχι στα τρία και οκτώ. Αν και δεν μπορούσαν να το μοιράσουν στα τρία και στα οκτώ, εντούτοις μπορούσαν να προβλέψουν ποια διαιρεση θα κατέληγε σε μεγαλύτερο κλάσμα.

ΣΥΖΗΤΗΣΗ

Αν και όλες οι μελέτες συμφωνούν ότι τα παιδιά δεν έχουν δυσκολία να μοιράσουν σωστά ασυνεχείς ποσότητες, όπως καραμέλες κλπ., και ότι η επίδοσή τους επηρεάζεται, αλλά όχι τόσο δραματικά, από το μέγεθος της διαιρετέας ποσότητας ή τον αριθμό των αποδεκτών (Correa, Nunes & Bryant, 1998. Desforges & Desforges, 1980), εντούτοις στο μερισμό συνεχών ποσοτήτων και οι δύο αυτοί παράγοντες – μάλιστα δε το μέγεθος του διαιρέτη που μελετήθηκε εδώ – επηρεάζουν καθοριστικά την επίδοση των παιδιών. Όμως αρκετά παιδιά, ακόμα και όταν δεν μπορούν να εκτελέσουν τη διαιρεση της συνεχούς ποσότητας, δείχνουν να έχουν μια εικόνα για το αναμενόμενο μέγεθος του πηλίκου με βάση την αντίστροφη σχέση διαιρέτη-πηλίκου. Αν και η έρευνα αυτή δεν σύγκρινε απευθείας την κατανόηση της αντίστροφης σχέσης διαιρέτη-πηλίκου με συνεχείς και ασυνεχείς ποσότητες, εντούτοις τα ποσοστά επίδοσης των παιδιών με συνεχείς ποσότητες φαίνεται να είναι υψηλότερα από αυτά που βρήκαν οι Correa, Nunes & Bryant (1998) και οι Kornilaki & Nunes (1997) με ασυνεχείς ποσότητες. Αν και η άμεση σύγκριση των δύο ερευνών δεν είναι δυνατή λόγω των μεθοδολογικών διαφορών τους, εντούτοις δείχνει ότι στο επίπεδο κατανόησης διαιρετικών σχέσεων οι συνεχείς ποσότητες δεν είναι πιο δύσκολες από τις ασυνεχείς. Αυτό σημαίνει ότι η γνώση των παιδιών για τα κλάσματα πηγάζει όχι τόσο από την εμπειρία τους να μοιράζουν συνεχείς ποσότητες, αλλά κατά πάσα πιθανότητα από τα σχήματα δράσης, που έχουν για τις ασυνεχείς ποσότητες, καθώς και την παρατήρηση των αποτελεσμάτων με διαφορετικούς διαιρέτες.

Τα αποτελέσματα της έρευνας αυτής βρίσκονται σε συμφωνία με αυτά άλλων μελετών για την πορεία εξέλιξης της ικανότητας μερισμού (Hiebert & Tonnesen,

1978. Hunting & Sharpley, 1988. Piaget, Inhelder & Sieminska, 1960. Pothier & Secada, 1993). Η έννοια του μισού είναι η πρώτη κλασματική έννοια που αναπτύσσονται τα παιδιά. Όπως παρατηρούν οι Pothier & Secada (1983), τα παιδιά συχνά βλέπουν ποσότητες να μοιράζονται στη μέση και γρήγορα μαθαίνουν να χρησιμοποιούν τη λέξη «μισό», χωρίς αρχικά να καταλαβαίνουν το νόημά της, γι' αυτό και ενδέχεται να πουν «έκοψα το μήλο στη μέση σε τρία κομμάτια». Γρήγορα όμως κατανοούν την πραγματική έννοια του όρου και μαθαίνουν να μοιράζονται στα δύο επιφέροντας τομές στη μέση. Στην επόμενη φάση το παιδί μαθαίνει να μοιράζει στα τέσσερα κάνοντας διπλές διχοτομήσεις. Το σχήμα των διχοτομήσεων φαίνεται να είναι τόσο ισχυρό, που παρεμβαίνει και δυσκολεύει την τριχοτόμηση μιας ποσότητας. Όλα τα παιδιά της έρευνας, που προσπάθησαν να μοιράσουν τον κύκλο στα τρία, ξεκίνησαν με τη διχοτόμησή του. Μετά από αυτό, δεν μπορούσαν, φυσικά, να υπολογίσουν πού θα έφερναν την επόμενη τομή, ώστε να δημιουργήσουν τρία ίσα μέρη.

Τα αποτελέσματα της μελέτης δείχνουν ότι το παιδί, πριν μπορέσει να εκτελέσει με ακρίβεια το μερισμό μιας συνεχούς ποσότητας σε κλάσματα, κατανοεί κάποιες βασικές σχέσεις που διέπουν τους όρους της διαίρεσης και ότι με βάση αυτές τις σχέσεις μπορεί να κάνει προβλέψεις για το μέγεθος του κλάσματος. Η κατανόηση της αντίστροφης σχέσης διαιρέτη-πηλίκου είναι μια σημαντική κατάκτηση, η οποία προηγείται της ικανότητας των παιδιών να μοιράζουν συνεχείς ποσότητες. Αυτό σημαίνει ότι οι απαρχές κατανόησης των κλασμάτων πρέπει να αναζητηθούν όχι μόνο στην πράξη μερισμού συνεχών ποσοτήτων, αλλά στην κατανόηση διαιρετικών σχέσεων, βάσει των οποίων το παιδί σχηματίζει προσδοκίες για το προβλεπόμενο μέγεθος των κλασμάτων. Ακόμα και αν το παιδί δεν ξέρει πώς να μοιράσει ένα κέικ στα τρία, εντούτοις ξέρει ότι το πηλίκο της διαίρεσης αυτής θα είναι μεγαλύτερο, από όταν η ίδια ποσότητα μοιραζόταν στα τέσσερα. Αυτή η κατανόηση είναι ιδιαίτερα σημαντική, ειδικά αν λάβει κανείς υπόψη του ότι, όταν τα παιδιά εισαχθούν στην γραπτή αναπαράσταση των κλασμάτων, τα περισσότερα πιστεύουν ότι το 1/3 είναι μικρότερο από το 1/4.

Τα αποτελέσματα της μελέτης συμφωνούν με τη θεωρία των Ritter-Johnson & Siegler (1998), σύμφωνα με την οποία τα παιδιά κατανοούν μαθηματικές σχέσεις και έννοιες (conceptual knowledge), πριν αποκτήσουν την ικανότητα να κάνουν τις σωστές πράξεις που εμπεριέχουν αυτές τις έννοιες (procedural knowledge). Φυσικά, οι μαθηματικές σχέσεις συναντώνται αρχικά στην καθημερινή ζωή των παιδιών και αργότερα εντάσσονται στο σχολικό πρόγραμμα. Αρκετά πεντάχρονα παιδιά αυτής της μελέτης μπορούσαν να υπολογίσουν πότε το κλάσμα θα ήταν μεγαλύτερο ή μικρότερο. Όμως, όταν ο ερευνητής τα καλούσε να εκτελέσουν αυτή τη διαίρεση, δεν μπορούσαν να τη φέρουν σε πέρας. Η πρώιμη αυτή γνώση των παιδιών φαίνεται να προέρχεται από τα σχήματα δράσης τους μοιράσματας που έχουν

αναπτύξει στην καθημερινή τους δραστηριότητα. Μέλλοντικες έρευνες αξίζει να μελετήσουν πώς το σχολείο μπορεί να αξιοποιήσει τη γνώση που φέρουν τα παιδιά για τα κλάσματα, ώστε να αποφευχθούν οι μετέπειτα παρανοήσεις, οι οποίες δημιουργούνται για το μέγεθος και την έννοια των κλασμάτων.

ΒΙΒΛΙΟΓΡΑΦΙΑ

- AHL, V. – MOORE, C.F. – DIXON, J.A. (1992): «Development of intuitive and numerical proportional reasoning». *Cognitive Development*, 7, σσ. 81-108.
- BEHR, M.J. – WACHSMUTH, I. – POST, T. – LESH, R. (1984): «Order and equivalence of rational numbers: A clinical teaching experiment». *Journal for Research in Mathematics Education*, 15, σσ. 323-341.
- BYRNES, J.P. – WASIK, B.A. (1991): «Role conceptual knowledge in mathematical procedural learning». *Developmental Psychology*, 27, σσ. 777-786.
- CORREA, J. (1995): *Young children's understanding of the division concept*. (Unpublished Ph.D. thesis) Oxford University.
- CORREA, J. – NUNES, T. – BRYANT, P. (1998): «Young children's understanding of division: The relation between division terms in a noncomputational task». *Journal of Educational Psychology*, 2, σσ. 1-9.
- DAVIS, G.E. – PEPPER, K.L. (1992): «Mathematical problems solving by preschool children». *Educational Studies in Mathematics*, 23, σσ. 397-415.
- DAVIS, G.E. – PITKETHLY, A. (1990): «Cognitive aspects in sharing». *Journal for Research in Mathematics Education*, 21 (2), σσ. 145-153.
- DESFORGES, A. – DESFORGES, C. (1980): «Number based strategies of sharing in young children». *Educational Studies*, 6 (2), σσ. 97-109.
- DIXON, J.A. – MOORE, C.F. (1996): «The developmental role of intuitive principles in choosing mathematical strategies». *Developmental Psychology*, 32, σσ. 241-253.
- FRYDMAN, O. – BRYANT, P.E. (1988): «Sharing and understanding of the number equivalence by young children». *Cognitive Development*, 3, σσ. 323-329.
- GOLDBLATT, A. – RAYMOND, C.L. (1996): «Conceptualizing non-unit fractions: A historical approach. *Proceedings of the 20th Conference of the International Group for the Psychology of Mathematics Education*, 1, σ. 175.
- HIEBERT, J. – TONNESSEN, L.H. (1978): «Development of the fraction concept in two physical contexts: An exploratory investigation». *Journal for Research in Mathematics Education*, 9 (5), σσ. 374-378.
- HUNTING, R.P. – SHARPLEY, C.F. (1988): «Fractional knowledge in preschool children». *Journal for Research in Mathematics Education*, 19 (2), σσ. 175-180.
- HUNTING, R.P. – DAVIS, G.E. (1991): «Dimensions of young children's conceptions of the fraction of half». Στο: R.P. HUNTING – G.E. DAVIS (Eds.): *Early fraction learning*. Springer, New York, σσ. 27-53.

- KIERAN, T. (1994): «Multiple views of multiplicative structures». Στο: G. HAREL – J. CONFREY (Eds.): *The development of multiplicative reasoning in the learning of mathematics*. State University of New York Press, Albany, New York, σσ. 389-400.
- KORNILAKI, E. (1999): *Young children's understanding of multiplicative concepts: A psychological approach*. (Unpublished Ph.D. thesis) University of London.
- KORNILAKI, E. – NUNES, T. (1997): «What do young children understand about division». *The Proceedings of the 21st International Conference of the International Group for the Psychology of Mathematics Education*, 1, σ. 242.
- MILLER, K. (1984): «Measurement procedures and the development of quantitative concepts». Στο: C. SOPHIAN: *Origins of cognitive skills. The eighteen annual carnegie symposium on cognition*. Erlbaum, Hillsdale, NJ, σσ. 193-228.
- PIAGET, J. – INHELDER, B. – SZEMINSKA, A. (1960): *The child's conception of geo-metry*. Roudledge & Kegan, London.
- POTHIER, Y. – SECADA, D. (1983): «Partitioning: The emergence of rational number ideas in young children». *Journal for Research in Mathematics Education*, 5, σσ. 307-317.
- RITTER-JOHNSON, B. – SINGER, R.S. (1998): «The relationship between conceptual and procedural knowledge in learning mathematics: A review». Στο: C. DONLAN (Ed.): *The Development of Mathematical Skills*. Psychology Press, Hove.
- SOPHIAN, C. – GARYANTES, D. – CHANG, C. (1997): «When three is less than two: Early understanding of fractional quantities». *Developmental Psychology*, 33(5), σσ. 731-744.
- STREEFLAND, L. (1984): «Unmasking N distractors as a source of failure in the learning of fractions». Στο: B. SOUTHWELL – R. EYLAND – M. COOPER – J. CONROY – K. COLLINS (Eds.): *Proceedings of the 8th International Conference for the International Group for the Psychology of Mathematics Education*. Mathematical Association of New South Wales, Sydney, σσ. 142-152.



Η Αικατερίνη Κορνηλάκη γεννήθηκε στο Ηράκλειο Κρήτης. Αποφοίτησε με άριστα από το Παιδαγωγικό Τμήμα Νηπιαγωγών του Πανεπιστημίου Κρήτης. Στη συνέχεια απέκτησε τον τίτλο του Master in Child Development από το Institute of Education του Πανεπιστημίου του Λονδίνου καθώς και τον τίτλο του Διδάκτορα από το ίδιο Πανεπιστήμιο. Εργάστηκε ως Λέκτορας της Εξελικτικής Ψυχολογίας στο Open University της Μ. Βρετανίας και σε ερευνητικά προγράμματα του Πανεπιστημίου του Λονδίνου. Σήμερα εργάζεται ως Λέκτορας της Ψυχολογίας της Προσχολικής Ήλικιας στο Π. Τ. Νηπιαγωγών τοῦ Πανεπιστημίου Κρήτης.