Αικατερίνη Ν. Κορνηλάκη
Διδακτορική διατριβή
University of London, 1999

Η κατανόηση του πολλαπλασιασμού και της διαίρεσης από τα μικρά παιδιά

Εισαγωγή

Πλήθος ερευνών για την ανάπτυξη της μαθηματικής σκέψης των παιδιών έχει ασχοληθεί με την κατανόηση εννοιών και τη λύση προβλημάτων σχετικών με τις πράξεις της πρόσθεσης και της αφαίρεσης (Carpenter & Moser, 1982, 1983· Fuson, 1992· Hughes, 1986· Riley, Greeno & Heller, 1983). Οι μελέτες αυτές έχουν δείξει, χωρίς αμφιβολία, ότι ακόμα και παιδιά προσχολικής ηλικίας, που δεν έχουν διδαχτεί τις πράξεις αυτές στο σχολείο, μπορούν να λύνουν ποικιλία προβλημάτων προσθετικού τύπου. Λιγότερες μελέτες υπάρχουν, ωστόσο, σχετικές με την κατανόηση εννοιών πολλαπλασιαστικού τύπου από τα μικρά παιδιά (Carpenter, Ansell, Franke, Fennema & Weisbeck, 1993· Kouba, 1989). Και αυτό, γιατί ο πολλαπλασιασμός και η διαίρεση θεωρούνται πράξεις δύσκολες, εκτός του πεδίου δυνατοτήτων των μικρών παιδιών.

Σκοπός της παρούσας μελέτης είναι να εξετάσει τις απαρχές κατανόησης του πολλαπλασιασμού και της διαίρεσης και το πώς τα παιδιά ανακαλύπτουν τη μεταξύ τους σχέση. Η υπόθεση της έρευνας είναι ότι οι απαρχές των πράξεων βρίσκονται στα σχήματα δράσης των παιδιών. Αυτή η υπόθεση, που προτάθηκε από τον Piaget (1965), έχει επιβεβαιωθεί από σχετικές μελέτες στην πρόσθεση και την αφαίρεση. Όπως είναι γνωστό, τα νήπια ενώνουν και αφαιρούν σύνολα μεταξύ τους, προτού ακόμα μπορέσουν να πουν ποια πράξη κάνουν. Αυτά τα σχήματα δράσης παίζουν καθοριστικό ρόλο στην κατανόηση των αριθμητικών πράξεων, γιατί οι σταθερές των σχημάτων δράσης είναι οι ίδιες με τις σταθερές των αντίστοιχων αριθμητικών πράξεων. Επειδή τα σχήματα δράσης αφορούν πράξεις επί των αντικειμένων και αλλαγές επί των μεταξύ τους σχέσεων (ενώνω, χωρίζω, μοιράζω...), ενδέχεται τα παιδιά να μάθουν για τις σχέσεις αυτές, προτού μπορέσουν να τις εκφράσουν ποσοτικά μέσω των πράξεων.

Τα παιδιά προσχολικής ηλικίας κατέχουν κάποια σχήματα δράσης, τα οποία σχετίζονται με τις πράξεις του πολλαπλασιασμού και της διαίρεσης. Για τον πολλαπλασιασμό, σύμφωνα με τον Pia-get, απαιτείται η κατανόηση των σχέσεων πολλαπλής αντιστοιχίας. Όπως τονίζει ο ίδιος, «όταν το παιδί κατανοήσει την πολλαπλή αντιστοιχία, σύντομα θα συνειδητοποιήσει και τον πολλαπλασιασμό και θα τον χρησιμοποιήσει ως πράξη» (Piaget, 1965, σ. 203-204). Έχει βρεθεί ότι παιδιά ηλικίας 5 έως 6 ετών κατανοούν τις σχέσεις πολλαπλής αντιστοιχίας και επομένως έχουν κάνει ένα σημαντικό βήμα για την κατάκτηση του πολλαπλασιασμού.

Τα σχήματα δράσης, που σχετίζονται με τη διαίρεση, αναπτύσσονται νωρίς. Ήδη από την ηλικία των 4 ετών, τα παιδιά γνωρίζουν να μοιράζουν μεταξύ τους αντικείμενα με τέτοιο τρόπο, έτσι ώστε όλοι οι αποδέκτες να καταλήγουν με ίσα μερίδια (Davis & Pepper, 1992· Davis & Pitkethly, 1990· Desforges & Desforges, 1980· Frydman, 1990· Hunting & Davis, 1991· Frydman & Bryant, 1988· Miller, 1984). Αυτό το σχήμα δράσης του μερισμού πιστεύεται ότι θέτει τα θεμέλια για την κατανόηση της πράξης της διαίρεσης.

Το ερώτημα, όμως, που τίθεται είναι τι τελικά κατανοούν τα παιδιά για τον πολλαπλασιασμό και τη διαίρεση από τα παραπάνω σχήματα δράσης. Αν τα παιδιά μαθαίνουν κάτι για τον πολλαπλασιασμό από το σχήμα πολλαπλής αντιστοιχίας, τότε ίσως μπορούν να καταλάβουν ότι το γινόμενο του πολλαπλασιασμού εξαρτάται τόσο από το μέγεθος όσο και από τον αριθμό των συνόλων, που βρίσκονται σε αντιστοιχία. Όσον αφορά τη διαίρεση, από την εμπειρία τους με τη διαδικασία του μοιράσματος, τα παιδιά ενδέχεται να κατανοήσουν τις σχέσεις, που υπάρχουν ανάμεσα στους διαιρετικούς όρους. Πιο συγκεκριμένα, αυτά ενδέχεται να κατανοήσουν την αντίστροφη σχέση διαιρέτη-πηλίκου, δηλαδή ότι όσο πιο πολλοί μοιράζονται κάτι, τόσο πιο λίγο θα πάρει ο καθένας. Κατά τους Correa, Nunes & Bryant (1998) η κατανόηση των διαιρετικών σχέσεων αποτελεί ένα σημαντικό βήμα για την κατάκτηση της διαίρεσης ως πράξης.

Η μελέτη αυτή θέτει ένα ακόμα ερώτημα για την ανάπτυξη του πολλαπλασιασμού και της διαίρεσης. Έχει βρεθεί ότι τα παιδιά κατέχουν έναν αριθμό σχημάτων δράσης σχετικών με τις δύο πράξεις, με τη βοήθεια των οποίων μπορούν να λύνουν προβλήματα πολλαπλασιασμού και διαίρεσης, προτού εισαχθούν στις πράξεις αυτές στο σχολείο. Δεν μας είναι γνωστό, όμως, αν τα παιδιά κατανοούν από την αρχή την αντίστροφη σχέση των δύο αυτών πράξεων ή αν οι δύο πράξεις αναπτύσσονται παράλληλα στην αρχή, για να συντονιστούν μεταξύ τους αργότερα. Η υπόθεση της μελέτης μας ήταν ότι οι δύο πράξεις αναπτύσσονται ανεξάρτητα η μια από την άλλη. Η υπόθεση αυτή στηρίχθηκε πρώτον στο ότι οι πράξεις αυτές πηγάζουν από διαφορετικά σχήματα δράσης: ο πολλαπλασιασμός από το σχήμα της πολλαπλής αντιστοιχίας και η διαίρεση από το σχήμα του μερισμού. Δεύτερο, ενδέχεται να συμβαίνει ό,τι συμβαίνει με την πρόσθεση και την αφαίρεση. Τα παιδιά προσχολικής ηλικίας, αν και λύνουν με ευκολία προβλήματα προσθετικού τύπου, ωστόσο δεν ανακαλύπτουν την αντίστροφη σχέση των δύο πράξεων από την αρχή.

Για να απαντήσουμε τα παραπάνω ερωτήματα, σχεδιάσαμε μια σειρά μελετών οι οποίες παρουσιάζονται εν συντομία στη συνέχεια.

Μελέτη Ι

Σκοπός μας στην πρώτη μελέτη ήταν να εξετάσουμε αν τα παιδιά μπορούν να διατάσσουν σε σειρά μεγέθους διαφορετικά πολλαπλασιαστικά γινόμενα με βάση τις σχέσεις πολλαπλής αντιστοιχίας. Το ερώτημά μας ήταν αν τα παιδιά κατανοούν ότι το γινόμενο θα εξαρτηθεί τόσο από το μέγεθος όσο και από τον αριθμό των συνόλων σε αντιστοιχία. Για παράδειγμα, κατανοούν τα παιδιά ότι 4 σακουλάκια με 3 σοκολάτες το καθένα μάς δίνουν περισσότερες σοκολάτες από 4 σακουλάκια με 2 σοκολάτες το καθένα; Για να βεβαιωθούμε ότι τα νήπια διατάσσουν τα σύνολα με βάση τις σχέσεις πολλαπλής αντιστοιχίας και όχι υπολογίζοντας το γινόμενό τους, τους ζητήθηκε: α) να υπολογίσουν το μέγεθος των συνόλων και β) να διατάξουν σύνολα συνεχών ποσοτήτων, που ήταν δύσκολο να υπολογίσουν αριθμητικά το γινόμενό τους.

Υποκείμενα

Στη μελέτη έλαβαν μέρος: α) 35 παιδιά μέσης ηλικίας 5,07 ετών, β) 35 παιδιά μέσης ηλικίας 6,06 ετών και γ) 35 παιδιά μέσης ηλικίας 7,07 ετών από την πόλη του Λονδίνου.

Σχεδιασμός και διαδικασία

Δείξαμε στα παιδιά δυο διαφορετικές σειρές από σπιτάκια, που βρίσκονταν σε αντιστοιχία. Στα σπιτάκια αυτά έμεναν κουνελάκια. Ζητήθηκε από τα παιδιά να μας πουν ποια από τις δύο σειρές είχε περισσότερα κουνελάκια σε διάφορες συνθήκες, στις οποίες άλλαζε είτε ο αριθμός των σπιτιών ανά σειρά είτε ο αριθμός κουνελιών ανά σπίτι. Για παράδειγμα, όταν κάθε σπίτι είχε 3 κουνέλια, αλλά η μια σειρά είχε 4 ενώ η άλλη 5 σπίτια, το παιδί μπορούσε να βρει ποια σειρά είχε τα περισσότερα κουνελάκια με βάση τη διαφορά των συνόλων σε αντιστοιχία. Όταν η μια σειρά είχε 4 σπιτάκια με 3 κουνέλια και η άλλη σειρά 4 σπιτάκια με 2 κουνέλια, το παιδί μπορούσε να βρει ποια σειρά είχε τα περισσότερα, σκεφτόμενο τη διαφορά στην αναλογία κουνελιών ανά σπίτι.

Μετά από κάθε δραστηριότητα ζητήθηκε από τα νήπια να υπολογίσουν αριθμητικά τον αριθμό των κουνελιών ανά σειρά. Η ικανότητά τους αυτή εξετάστηκε ζητώντας από τα παιδιά να πάρουν τόσες μπουκίτσες τροφής από ένα σακουλάκι, όσα ήταν τα κουνελάκια κάθε σειράς, για να τα ταΐσουν.

Σε ανάλογες δραστηριότητες με συνεχείς ποσότητες ζητήθηκε από τα νήπια να βρουν ποιο κέικ ήταν πιο γλυκό. Πάνω στο τραπέζι υπήρχαν δύο μπολ. Η εξετάστρια έβαζε είτε περισσότερες κουταλιές ζάχαρης στο ένα μπολ (π.χ. 3 κουταλιές της σούπας στο ένα και 4 στο άλλο) είτε τον ίδιο αριθμό αλλά με διαφορετικού μεγέθους κουτάλι (π.χ. 3 κουταλιές του γλυκού στο ένα και 3 κουταλιές της σούπας στο άλλο). Προηγουμένως είχε δοθεί στα παιδιά η δυνατότητα να εξετάσουν τη διαφορά μεγέθους στα κουταλάκια και μάλιστα είχαν μάθει ότι 2 κουταλάκια του γλυκού ζάχαρη αντιστοιχούσαν σε 1 κουτάλι της σούπας. Το μπολ ήταν αδιαφανές και έτσι τα παιδιά δεν μπορούσαν να συγκρίνουν την ποσότητα ζάχαρης άμεσα.

Στη δραστηριότητα, στην οποία ζητήθηκε από τα παιδιά να υπολογίσουν την ποσότητα ζάχαρης σε κάθε κέικ, η εξετάστρια έβαζε ζάχαρη στο ένα μπολ π.χ. με το κουταλάκι του γλυκού και ζητούσε από το παιδί να βάλει στο άλλο κέικ την ίδια ποσότητα ζάχαρης με το κουτάλι της σούπας.

Κάθε παιδί απάντησε συνολικά τέσσερις ερωτήσεις από κάθε δραστηριότητα.

Αποτελέσματα

Η ανάλυση των απαντήσεων, που δόθηκαν, έδειξε ότι το 89% των 5χρονων, το 94% των 6χρονων και το 97% των 7χρονων απάντησαν σωστά στις δραστηριότητες στις οποίες μπορούσαν να διατάξουν τα δύο σύνολα με βάση τον αριθμό σπιτιών ανά σειρά ή την αναλογία των κουνελιών ανά σπίτι. Ωστόσο, το ποσοστό επιτυχίας ήταν χαμηλότερο στις δραστηριότητες, στις οποίες έπρεπε να υπολογίσουν το συνολικό αριθμό κουνελιών και να πάρουν τόσες μπουκίτσες πίτουρα όσα και αυτά. Η διαφορά αυτή ήταν στατιστικώς σημαντική για τα παιδιά ηλικίας 5 ετών ($p<.01$).

Ακόμα πιο υψηλό ήταν το ποσοστό επιτυχίας των παιδιών στις δραστηριότητες στις οποίες διέτασσαν συνεχείς ποσότητες με βάση τις σχέσεις πολλαπλής αντιστοιχίας. Τα παιδιά μπορούσαν εύκολα να κρίνουν ποιο από τα δύο κέικ θα ήταν περισσότερο γλυκό. Όμως, ακόμα και τα 7χρονα είχαν μεγάλη δυσκολία να υπολογίσουν πόση ζάχαρη θα έβαζαν στο ένα κέικ σε κουταλάκια του γλυκού, ξέροντας πόση ζάχαρη είχε το άλλο σε κουτάλια της σούπας.

Συμπεράσματα

Τα αποτελέσματα της μελέτης δείχνουν ότι τα παιδιά, πολύ πριν εισαχθούν στην πράξη του πολλαπλασιασμού στο σχολείο, μπορούν να διατάσσουν πολλαπλασιαστικά σύνολα με βάση τις σχέσεις πολλαπλής αντιστοιχίας. Ακόμα και τα 5χρονα φαίνεται να κατανοούν ότι το μέγεθος του γινομένου εξαρτάται τόσο από το μέγεθος όσο και από τον αριθμό των συνόλων σε αντιστοιχία. Τα νήπια μπορούν να διατάσσουν τα πολλαπλασιαστικά γινόμενα, προτού ακόμα μπορέσουν να τα υπολογίσουν αριθμητικά. Τα 5χρονα μπορούσαν να κρίνουν ποια σειρά είχε τα περισσότερα, αν και είχαν δυσκολία να υπολογίσουν αριθμητικά τον ακριβή αριθμό τους. Αυτό σημαίνει ότι η διάταξη των συνόλων έγινε με βάση τις σχέσεις πολλαπλής αντιστοιχίας και όχι με αριθμητικό υπολογισμό των μεγεθών τους. Το συμπέρασμα αυτό ενισχύεται και από την απόδοση των παιδιών στις δραστηριότητες με συνεχείς ποσότητες, στις οποίες τα παιδιά είχαν σημαντική δυσκολία να υπολογίσουν την ποσότητα ζάχαρης, αλλά και από τον τρόπο που αιτιολόγησαν τις απαντήσεις τους. Τα παιδιά αναφέρθηκαν είτε σε διαφορές του μεγέθους των συνόλων είτε σε διαφορές στις αναλογίες τους. Αν η υπόθεση του Piaget ότι η πολλαπλή αντιστοιχία αποτελεί τη βάση για την κατανόηση του πολλαπλασιασμού είναι αληθής, τότε τα μικρά παιδιά φαίνεται να κατέχουν πολύ καλά αυτή τη γνώση και να μπορούν να την αξιοποιούν, για να κάνουν προβλέψεις για το μέγεθος των πολλαπλασιαστικών γινομένων.

Μελέτη ΙΙ

Ο στόχος της δεύτερης μελέτης ήταν να εξετάσει την κατανόηση της αντίστροφης σχέσης διαιρέτη-πηλίκου στο πλαίσιο προβλημάτων διαίρεσης μερισμού και διαίρεσης μέτρησης με ασυνεχείς και συνεχείς ποσότητες. Η μελέτη διαιρετικών σχέσεων με συνεχείς ποσότητες παρουσιάζει ιδιαίτερο ενδιαφέρον, γιατί η διαίρεσή τους οδηγεί σε κλασματικά πηλίκα, τα οποία θεωρούνται δύσκολα από τα παιδιά (Kieren, 1994).

Υποκείμενα

Στη μελέτη των διαιρετικών σχέσεων με προβλήματα μερισμού έλαβαν μέρος 96 παιδιά, τα οποία χωρίστηκαν στις εξής ηλικιακές ομάδες: α) 32 παιδιά μέσης ηλικίας 5,05 ετών, β) 32 παιδιά μέσης ηλικίας 6,06 ετών και γ) 32 παιδιά μέσης ηλικίας 7,06 ετών.

Στη μελέτη με προβλήματα διαίρεσης μέτρησης έλαβαν μέρος 96 παιδιά από τρεις ηλικιακές ομάδες: α) 32 παιδιά μέσης ηλικίας 5,07 ετών, β) 32 παιδιά μέσης ηλικίας 6,07 ετών και γ) 32 παιδιά μέσης ηλικίας 7,06 ετών.

Τα παιδιά παρακολουθούσαν δημόσια σχολεία στο Λονδίνο και δεν είχαν εισαχθεί στην πράξη της διαίρεσης στο σχολείο.

Σχεδιασμός και διαδικασία

Πρόκειται για δύο ανεξάρτητα πειράματα, που εξετάζουν την κατανόηση της αντίστροφης σχέσης διαιρέτη-πηλίκου, το ένα στο πλαίσιο προβλημάτων μερισμού και το άλλο στο πλαίσιο προβλημάτων μέτρησης. Στα προβλήματα μερισμού ζητήθηκε από τα παιδιά να συγκρίνουν το μέρισμα δύο διαιρέσεων και να κρίνουν ποια διαίρεση θα κατέληγε σε μεγαλύτερο πηλίκο. Για παράδειγμα, στην περίπτωση των ασυνεχών ποσοτήτων τα παιδιά έπρεπε να βρουν ποιες γάτες θα έτρωγαν περισσότερο: 3 καφετιές, που μοιράζονταν 12 ψάρια ή 4 γκρίζες, που μοιράζονταν και αυτές 12 ψάρια. Το υλικό υπήρχε πάνω σε ένα τραπέζι, για να υποβοηθήσει τη σκέψη των παιδιών, χωρίς όμως να τους επιτρέπεται να εκτελέσουν τη διαίρεση. Στην περίπτωση των συνεχών ποσοτήτων οι γάτες μοιράζονταν ένα κέικ. Σημειωτέον ότι τα παιδιά έπρεπε απλώς να κρίνουν αν θα υπήρχε διαφορά στο μέρισμα και όχι να υπολογίσουν το μέγεθός του.

Ομοίως, στα προβλήματα διαίρεσης μέτρησης δείξαμε στα παιδιά 2 διαφορετικές γάτες, που έκαναν τραπέζι τα 12 ψαράκια που είχαν. Η μια γάτα έδινε από 3 ψαράκια σε κάθε φίλη της, ενώ η άλλη από 2. Τα παιδιά καλούνταν να κρίνουν ποια γάτα θα έβγαζε περισσότερα μερίδια και θα τάιζε περισσότερους φίλους της. Στην περίπτωση των προβλημάτων μέτρησης με συνεχείς ποσότητες οι γάτες μοίραζαν ένα κέικ σε κομμάτια διαφορετικού μεγέθους.

Τα παραπάνω προβλήματα με ασυνεχείς και συνεχείς ποσότητες δόθηκαν σε δύο πειραματικές συνθήκες: α) Στη συνθήκη των ταυτόσημων διαιρετών ο αριθμός των αποδεκτών ήταν ο ίδιος σε κάθε συγκρινόμενο ζεύγος. Πρόκειται για συνθήκη ελέγχου, ώστε να ελεγχθεί αν τα παιδιά κατανοούσαν το πρόβλημα. β)

Στη συνθήκη των διαφορετικών διαιρετών, που ήταν και η πειραματική συνθήκη, κάθε συγκρινόμενο ζεύγος είχε διαφορετικό αριθμό από γάτες. Για να δώσουν τα παιδιά τη σωστή απάντηση, έπρεπε να εφαρμόσουν την αντίστροφη σχέση διαιρέτη-πηλίκου, δηλαδή όσο περισσότεροι μοιράζονται κάτι, τόσο λιγότερο θα πάρει ο καθένας τους. Το μέγεθος του διαιρετέου παρέμενε σταθερό σε κάθε σύγκριση. Σε κάθε παιδί δόθηκαν συνολικά τέσσερα προβλήματα από κάθε συνθήκη.

Αποτελέσματα

Η ανάλυση των αποτελεσμάτων έδειξε ότι η πλειοψηφία των παιδιών απάντησε σωστά στη συνθήκη ελέγχου. Στην πειραματική συνθήκη των διαφορετικών διαιρετών στα προβλήματα μερισμού το ένα τρίτο των 5χρονων, τα μισά από τα 6χρονα και το 80% των 7χρονων έδωσαν τη σωστή απάντηση. Η επίδοση των παιδιών αυξήθηκε σημαντικά με την ηλικία τους ($p<.001$). Δεν υπήρχε διαφορά στην επίδοση των παιδιών στις ασυνεχείς και τις συνεχείς ποσότητες ($p<.5$). Αν τα παιδιά κατανοούσαν την αντίστροφη σχέση διαιρέτη-πηλίκου την εφάρμοζαν και στα προβλήματα με ασυνεχείς και συνεχείς ποσότητες.

Ομοίως, και στα προβλήματα μέτρησης το 16% των 5χρονων, το 38% των 6χρονων και το 69% των 7χρονων έδωσε τη σωστή απάντηση στα προβλήματα με τις ασυνεχείς ποσότητες. Ελαφρά αυξημένα ήταν τα ποσοστά επίδοσης με συνεχείς ποσότητες, αλλά η διαφορά δεν βρέθηκε στατιστικώς σημαντική. Η επίδοση των παιδιών και στους δύο τύπους ποσοτήτων αυξήθηκε σημαντικά με την ηλικία τους ($p<.001$).

Η σύγκριση της επίδοσης των παιδιών στα προβλήματα μερισμού και διαίρεσης μέτρησης έδειξε ότι τα προβλήματα μερισμού ήταν ευκολότερα, αλλά μόνο όταν η μοιραζόμενη ποσότητα ήταν ασυνεχής.

Η ποιοτική ανάλυση των αιτιολογήσεων, τις οποίες έδωσαν τα παιδιά στις απαντήσεις τους, έδειξε ότι τα περισσότερα παιδιά, που έδωσαν λανθασμένες απαντήσεις, εφάρμοζαν συστηματικά μια ανάλογη σχέση ανάμεσα στο διαιρέτη και το πηλίκο. Θεωρούσαν δηλαδή ότι όσο περισσότεροι μοιράζονται μια ποσότητα, τόσο περισσότερο θα πάρει ο καθένας. Υπήρξαν ακόμα παιδιά, που παραβλέποντας την ανισότητα στον αριθμό των αποδεκτών, επικέντρωσαν την προσοχή τους στην αριθμητική ισότητα των διαιρετέων. Θεώρησαν ότι οι γάτες και των δύο ομάδων θα έτρωγαν τον ίδιο αριθμό από ψάρια, αφού και στις δύο περιπτώσεις η μοιραζόμενη ποσότητα ήταν η ίδια. Τέλος, μερικά παιδιά, κυρίως από τη μικρότερη ηλικιακή ομάδα, έδωσαν απαντήσεις του τύπου «δεν ξέρω» ή απαντήσεις που αντανακλούσαν τις προσωπικές τους προτιμήσεις. Τα παιδιά που απάντησαν σωστά ήταν εκείνα, που εφάρμοσαν συστηματικά την αντίστροφη σχέση διαιρέτη-πηλίκου και με τον τρόπο τους τόνισαν ότι οι περισσότεροι θα πάρουν το λιγότερο.

Συμπεράσματα

Τα αποτελέσματα της μελέτης δείχνουν ότι τα παιδιά μέσα από την καθημερινή τους εμπειρία με δραστηριότητες μερισμού αρχίζουν να κατανοούν κάποιες από τις βασικές διαιρετικές σχέσεις. Η κατανόηση αυτή φαίνεται ακόμα πιο σημαντική, αν λάβουμε υπόψη μας ότι τα παιδιά που πήραν μέρος στην έρευνα δεν είχαν διδαχθεί διαίρεση στο σχολείο. Η κατανόηση της αντίστροφης σχέσης διαιρέτη-πηλίκου στο πλαίσιο προβλημάτων με συνεχείς ποσότητες είναι ένα ιδιαίτερα σημαντικό επίτευγμα, γιατί, ως γνωστόν, τα παιδιά αντιμετωπίζουν ιδιαίτερο πρόβλημα με τα κλάσματα. Τα παιδιά του δημοτικού κάνουν συστηματικά το λάθος να θεωρούν ότι το 1/4 είναι μεγαλύτερο από το 1/2, επειδή είναι επηρεασμένα από τις διατακτικές σχέσεις των ακέραιων αριθμών. Ωστόσο, στο πλαίσιο των προβλημάτων με συνεχείς ποσότητες τα παιδιά μπόρεσαν να προβλέψουν ποια διαίρεση θα κατέληγε σε μεγαλύτερο και ποια σε μικρότερο κλάσμα. Καταλάβαιναν ότι ένα κέικ μοιρασμένο στα 4 θα έδινε μικρότερα μερίδια από το ίδιο κέικ μοιρασμένο στα 2. Η κατάκτηση της αντίστροφης σχέσης διαιρέτη-πηλίκου είναι ιδιαίτερα σημαντική και για το λόγο ότι τα παιδιά γενικά έχουν δυσκολίες στην κατανόηση αντίστροφων σχέσεων ακόμα και στην ηλικία των 9 ετών (Acredolo, Adams & Schmid, 1984). Τα αποτελέσματα των δύο αυτών μελετών τονίζουν ότι τα παιδιά πολύ πριν διδαχθούν τη διαίρεση στο σχολείο, αρχίζουν να κατανοούν τις διαιρετικές σχέσεις. Πρόκειται για κατανόηση η οποία πηγάζει από το σχήμα δράσης του μερισμού και η οποία θα αποτελέσει τη βάση για την περαιτέρω κατανόηση της διαίρεσης.

Μελέτη III

Σκοπός της τρίτης έρευνας ήταν η μελέτη της κατανόησης της αντίστροφης σχέσης ανάμεσα στον πολλαπλασιασμό και τη διαίρεση. Οι περισσότεροι μελετητές έχουν ασχοληθεί με την ικανότητα των παιδιών να λύνουν προβλήματα πολλαπλασιασμού και διαίρεσης (Bell, Greer, Grimison & Mangan, 1989· Brown, 1992· Burton, 1992· Kouba, 1989· Nesher, 1992) και με τη δυσκολία των προβλημάτων αυτών σε σχέση με αυτή των προβλημάτων προσθετικού τύπου (Carpenter et al., 1993). Δεν μας είναι γνωστό, όμως, αν τα παιδιά που λύνουν προβλήματα πολλαπλασιασμού και διαίρεσης κατανοούν και την αντίστροφη σχέση, η οποία υπάρχει ανάμεσα στις δύο αυτές πράξεις. Ένας τρόπος για να εξετάσουμε αυτή την κατανόηση είναι να δώσουμε στα παιδιά προβλήματα, που απαιτούν αντιστροφή των σχημάτων δράσης τους. Για παράδειγμα, το πρόβλημα: «Η Ελένη έκανε ένα πάρτι και ήρθαν 4 φίλοι της. Κάθε φίλος της της έδωσε τον ίδιο αριθμό από λουλούδια. Στο τέλος πήρε 12 λουλούδια. Πόσα λουλούδια τής έδωσε ο κάθε φίλος της;». Αυτό είναι ένα πρόβλημα, στο οποίο ο ένας από τους όρους που βρίσκονται σε αντιστοιχία, στη συγκεκριμένη περίπτωση ο αριθμός λουλουδιών ανά φίλο, είναι άγνωστος. Το πρόβλημα αυτό μπορεί να λυθεί με δύο τρόπους, που αντανακλούν δύο διαφορετικούς τρόπους σκέψης. Τα παιδιά μπορούν να το λύσουν με διαδικασίες αντιστοίχησης, που βασίζονται στη μέθοδο της δοκιμής και του λάθους. Μπορούν να πάρουν, για παράδειγμα, 4 φίλους, να τους δώσουν από 2 λουλούδια και να δουν αν το άθροισμα των λουλουδιών είναι 12. Αν δεν φθάσουν στο επιθυμητό αποτέλεσμα, πρέπει να δοκιμάσουν με 3 λουλούδια κ.ο.κ. Μια τέτοια προσέγγιση θα έδειχνε ότι το παιδί παραμένει προσκολλημένο στις ενέργειες, που περιγράφονται στο πρόβλημα. Ένας άλλος τρόπος να λυθεί το πρόβλημα είναι με αντιστροφή των μετασχηματισμών. Το παιδί στην περίπτωση αυτή μοιράζει τα 12 λουλούδια στους 4 φίλους, για να βρει πόσα λουλούδια αντιστοιχούν στον καθένα. Αυτή η λύση απαιτεί το συντονισμό των σχημάτων δράσης του μερισμού και της αντιστοίχησης. Το παιδί πρέπει να αντιστρέψει νοητικά τους μετασχηματισμούς του προβλήματος και να εφαρμόσει το σχήμα δράσης του μερισμού, για να λύσει ένα πρόβλημα αντιστοίχησης. Ο συντονισμός αυτός των διαφορετικών πολλαπλασιαστικών σχημάτων δράσης δείχνει ότι το παιδί κατανοεί την εσωτερική σχέση, η οποία υπάρχει ανάμεσα στον πολλαπλασιασμό και τη διαίρεση, και λύνει ένα πρόβλημα αντιστοίχησης με διαδικασίες μερισμού.

Ομοίως, τα προβλήματα μερισμού, στα οποία ένας όρος είναι άγνωστος, μπορούν να δοθούν, για να εξετάσουμε αν τα παιδιά κατανοούν τον πολλαπλασιασμό ως πράξη αντίστροφη της διαίρεσης. Για παράδειγμα το πρόβλημα: «Είχα μερικά γλυκά και τα μοίρασα σε 4 φίλους μου. Ο καθένας πήρε από 3. Πόσα γλυκά είχα;». Το πρόβλημα αυτό περιγράφει μια δραστηριότητα μερισμού με άγνωστο το μέγεθος του διαιρετέου. Και πάλι το πρόβλημα μπορεί να λυθεί με δύο τρόπους. Ο ένας είναι με διαδικασίες μερισμού, που αντανακλούν τις ενέργειες, που περιγράφονται στο πρόβλημα ή με αντιστοίχηση, που απαιτεί αντιστροφή των μετασχηματισμών. Το παιδί, δηλαδή, ή θα αρχίσει να μοιράζει μια ποσότητα γλυκών μέχρι να πάρει ο καθένας από 3 και θα μετρήσει το σύνολό τους, ή θα σχηματίσει 4 τριάδες και θα μετρήσει το γινόμενό τους.

Για να εξετάσουμε αν τα παιδιά κατανοούν την αντίστροφη σχέση πολλαπλασιασμού και διαίρεσης τους δώσαμε μια σειρά προβλημάτων, που εξέταζαν την ικανότητά τους να λύνουν άμεσα και αντίστροφα προβλήματα.

Υποκείμενα

Στη μελέτη έλαβαν μέρος 120 παιδιά. Αυτά φοιτούσαν σε σχολεία του Λονδίνου και ανήκαν στις εξής τέσσερις ηλικιακές ομάδες: α) 30 παιδιά ήταν μέσης ηλικίας 5,06 ετών, β) 30 παιδιά ήταν μέσης ηλικίας 6,07 ετών, γ) 30 παιδιά ήταν μέσης ηλικίας 7,06 ετών και δ) 30 παιδιά ήταν μέσης ηλικίας 8,06 ετών.

Σχεδιασμός και διαδικασία

Στα παιδιά δόθηκαν δύο ομάδες προβλημάτων πολλαπλασιασμού και διαίρεσης. Η μια ομάδα αποτελούνταν από προβλήματα, τα οποία τα παιδιά μπορούσαν να μοντελοποιήσουν με τα σχήματα δράσης τους (άμεσα προβλήματα). Πρόκειται για προβλήματα πολλαπλασιασμού, διαίρεσης μερισμού και διαίρεσης μέτρησης, τα οποία μπορούσαν να λυθούν με το σχήμα δράσης της πολλαπλής αντιστοιχίας, του μερισμού και της αφαίρεσης πηλίκων αντίστοιχα. Ο στόχος μας με την εισαγωγή αυτών των προβλημάτων ήταν να εξετάσουμε αν τα παιδιά μπορούσαν να ενεργοποιήσουν τα σχήματα δράσης τους, για να λύσουν προβλήματα που μπορούσαν να μοντελοποιήσουν άμεσα. Η δεύτερη ομάδα αποτελούνταν από προβλήματα πολλαπλασιασμού και διαίρεσης, των οποίων όμως άγνωστη τιμή ήταν μια βασική πληροφορία (αντίστροφα προβλήματα). Αναμενόταν ότι τα παιδιά, που είχαν συντονίσει τα σχήματα δράσης τους για τον πολλαπλασιασμό και τη διαίρεση και κατανοούσαν την αντίστροφη σχέση των δύο πράξεων θα αντέστρεφαν τους μετασχηματισμούς και θα έλυναν τα προβλήματα πολλαπλής αντιστοιχίας με διαίρεση και τα προβλήματα διαίρεσης με διαδικασίες αντιστοίχησης. Τα προβλήματα αντιστοίχησης με άγνωστο το μέγεθος των ομάδων σε αντιστοιχία θα μπορούσαν να λυθούν με μερισμό. Τα προβλήματα αντιστοίχησης με άγνωστο τον αριθμό των ομάδων σε αντιστοιχία θα μπορούσαν να λυθούν με αφαίρεση πηλίκων. Τέλος, τα προβλήματα μερισμού με άγνωστο το διαιρετέο θα μπορούσαν να λυθούν με διαδικασίες αντιστοίχησης (Πίνακας 1).

Η ερευνήτρια διάβασε το κάθε πρόβλημα στα παιδιά. Τα προβλήματα μπορούσαν να λυθούν με τη βοήθεια μικρών κύβων, που τα παιδιά είχαν στη διάθεσή τους. Τα προβλήματα δόθηκαν σε τυχαία σειρά και με ποικίλους αριθμητικούς συνδυασμούς.

Πίνακας 1
Ο σχεδιασμός της μελέτης

Το σχήμα δράσης του μερισμού	
ως άμεση μοντελοποίηση	*ως αντίστροφη λύση*
Πρόβλημα διαίρεσης μερισμού. 'Εχεις 15 γλυκά. Θέλεις να τα μοιράσεις όλα σε 3 φίλους σου. Πόσα γλυκά θα πάρει ο καθένας;	*Πρόβλημα αντιστοίχησης με άγνωστο το μέγεθος των ομάδων σε αντιστοιχία.* 'Εκανες ένα πάρτι και ήρθαν 3 φίλοι σου. Κάθε φίλος σου σου έδωσε τον ίδιο αριθμό από λουλούδια. Πήρες 12 λουλούδια όλα μαζί. Πόσα λουλούδια σού έδωσε κάθε φίλος σου;
Το σχήμα δράσης της αφαίρεσης πηλίκων	
ως άμεση μοντελοποίηση	*ως αντίστροφη λύση*
Πρόβλημα διαίρεσης μέτρησης. 'Εχεις 15 γλυκά. Θέλεις να δώσεις σε κάθε φίλο σου από 3 γλυκά. Πόσους φίλους μπορείς να κεράσεις;	*Πρόβλημα αντιστοίχησης με άγνωστο τον αριθμό των ομάδων σε αντιστοιχία.* 'Εκανες ένα πάρτι και κάθε φίλος σου σου έδωσε 3 λουλούδια. Πήρες 15 λουλούδια όλα μαζί. Πόσα παιδιά ήρθαν στο πάρτι σου;
Το σχήμα δράσης της αντιστοίχησης	
ως άμεση μοντελοποίηση	*ως αντίστροφη λύση*
Πρόβλημα πολλαπλασιασμού. 'Εχεις 3 πακέτα. Κάθε πακέτο έχει από 4 σοκολάτες. Πόσες σοκολάτες έχεις όλες μαζί;	*Πρόβλημα μερισμού με άγνωστο το διαιρετέο.* 'Εκανες ένα πάρτι και ήρθαν 4 παιδιά. Τους έδωσες όλα σου τα μπαλόνια και καθένα πήρε από 3. Πόσα μπαλόνια είχες;

Αποτελέσματα

Στην ανάλυση των αποτελεσμάτων συγκρίναμε την επίδοση των παιδιών στα ζεύγη των προβλημάτων, που το σχήμα δράσης του μερισμού, της αφαίρεσης πηλίκων και της αντιστοίχησης μπορούσε να ήταν η άμεση και η αντίστροφη μέθοδος λύσης.

Όπως φαίνεται και στον Πίνακα 2, τα περισσότερα παιδιά έλυσαν το πρόβλημα, που μοντελοποιούσε το σχήμα δράσης του μερισμού, αλλά είχαν δυσκολία να λύσουν το πρόβλημα αντιστοίχησης με άγνωστο το μέγεθος των ομάδων σε αντιστοιχία, μολονότι και αυτό μπορούσε να λυθεί με το ίδιο σχήμα δράσης. Τα άμεσα προβλήματα μερισμού ήταν στατιστικώς ευκολότερα από τα αντίστροφα ($p<.0001$). Τα παιδιά, που έλυσαν το αντίστροφο πρόβλημα, δεν σημαίνει ότι είχαν συντονίσει τα σχήματα δράσης τους, γιατί υπήρχε περίπτωση να λύσουν το αντίστροφο πρόβλημα, όχι με μερισμό, αλλά με διαδικασίες αντιστοίχησης. Μόνο τα μισά παιδιά έλυσαν τα αντίστροφα προβλήματα με μερισμό, δηλαδή μοίρασαν το σύνολο των 12 λουλουδιών στους 3 φίλους, για να βρουν πόσα λουλούδια έφερε ο καθένας. Τα υπόλοιπα έφτασαν στη λύση με διαδικασίες αντιστοίχησης ή άμεσης ανάκλησης. Στις διαδικασίες αντιστοίχησης δοκίμασαν διαφορετικούς αριθμητικούς συνδυασμούς. Αν ο κάθε φίλος έφερνε από 2 λουλούδια, τότε το σύνολο θα ήταν 6, αν έφερνε από 3, θα ήταν 9, αν έφερνε από 4 θα ήταν 12!

Και στα προβλήματα διαίρεσης μέτρησης τα παιδιά απέδωσαν καλύτερα, όταν το σχήμα δράσης της αφαίρεσης πηλίκων μοντελοποιούσε άμεσα το πρόβλημα. Τα αντίστροφα προβλήματα ήταν στατιστικώς δυσκολότερα ($p<.002$), παρόλο που και αυτά μπορούσαν να λυθούν με το ίδιο σχήμα δράσης. Ακόμα και όταν τα παιδιά έφτασαν στη λύση των αντίστροφων προβλημάτων, συχνά το κατάφερναν δοκιμάζοντας διαφορετικές αντιστοιχήσεις ή με άμεση ανάκληση. Τα παιδιά υπέθεταν ότι ήρθαν 2, 3 ή 4 φίλοι στο πάρτι και άθροιζαν τον αριθμό των λουλουδιών, που κρατούσαν, μέχρι να βρουν το 12. Το 60% των παιδιών έλυσε το πρόβλημα με

Πίνακας 2
Ο αριθμός των παιδιών που πέτυχαν στα άμεσα και τα αντίστροφα προβλήματα ανά ηλικία

		Σχήμα μερισμού		Σχήμα αφαίρεσης πηλίκων		Σχήμα πολλαπλής αντιστοιχίας	
Ηλικία	N	Άμεσα προβλήματα	Αντίστροφα προβλήματα	Άμεσα προβλήματα	Αντίστροφα προβλήματα	Άμεσα προβλήματα	Αντίστροφα προβλήματα
5	30	16	3	9	5	11	11
6	30	22	9	15	11	21	20
7	30	27	17	24	19	26	26
8	30	30	24	25	24	30	29
Σύνολο	120	95	53	73	59	88	86

αντιστροφή, δηλαδή αφαιρώντας από το συνολικό αριθμό των 12 λουλουδιών τριάδες και στη συνέχεια μέτρησαν πόσες τριάδες σχηματίστηκαν.

Στα προβλήματα πολλαπλασιασμού, όλα σχεδόν τα παιδιά, που έλυσαν τα άμεσα, έλυσαν και τα αντίστροφα. Χαρακτηριστικό ήταν ότι ακόμα και τα προβλήματα μερισμού με άγνωστο το διαιρετέο λύθηκαν με αντιστροφή. Τα παιδιά στο σχετικό πρόβλημα του Πίνακα 1 έφτιαξαν 4 τριάδες και μέτρησαν το άθροισμά τους.

Και στους τρεις τύπους προβλημάτων η επίδοση των παιδιών βελτιώθηκε σημαντικά με την αύξηση της ηλικίας τους.

Συμπεράσματα

Τα αποτελέσματα της μελέτης επαληθεύουν τα αποτελέσματα προηγούμενων μελετών για την ικανότητα των παιδιών να λύνουν προβλήματα πολλαπλασιασμού και διαίρεσης, που μπορούν τα παιδιά να μοντελοποιήσουν άμεσα (Anghileri, 1997· Brown, 1992· Burton, 1992· Carpenter et al., 1993· Carraher & Bryant, 1987· Kouba, 1989), ακόμα και προτού διδαχτούν τις πράξεις αυτές στο σχολείο. Αυτό σημαίνει ότι τα παιδιά κατέχουν έναν αποτελεσματικό αριθμό σχημάτων δράσης, που υποστηρίζει την κατανόηση των πολλαπλασιαστικών δομών.

Η μελέτη αυτή προχώρησε παραπέρα, για να εξετάσει, αν τα παιδιά κατανοούν την αντίστροφη σχέση των δύο πράξεων. Τα αποτελέσματα παρουσιάζουν μια ασυμμετρία ως προς το συντονισμό αυτό. Τα παιδιά είχαν δυσκολία να λύσουν τα προβλήματα αντιστοιχίας με άγνωστο τον ένα όρο της αντιστοιχίας, αν και τα προβλήματα αυτά μπορούσαν να λυθούν με το σχήμα δράσης του μερισμού ή της αφαίρεσης πηλίκων, που ήδη κατείχαν. Αυτό σημαίνει ότι τα παιδιά δεν μπορούσαν να αντιστρέψουν νοητικά τους μετασχηματισμούς, για να κατανοήσουν το πρόβλημα. Όμως, τα ίδια παιδιά δεν είχαν δυσκολία να εφαρμόσουν το σχήμα δράσης της αντιστοιχίας ως άμεση και αντίστροφη λύση, για να λύσουν τα προβλήματα πολλαπλασιασμού και μερισμού με άγνωστο το διαι-ρετέο. Αυτό, ίσως, να σημαίνει ότι τα παιδιά κατανοούν ευκολότερα τον πολλαπλασιασμό ως αντίστροφο της διαίρεσης παρά το αντίστροφο. Η πιο πιθανή πάντως εξήγηση φαίνεται να είναι ότι η επίδοση των παιδιών επηρεάστηκε από τη διατύπωση του αντίστροφου προβλήματος, στο οποίο η αντιστοιχία παιδιών-μπαλονιών διατυπωνόταν με σαφήνεια.

Τα αποτελέσματα συγκλίνουν στην άποψη ότι τα παιδιά έχουν δυσκολία να συντονίσουν τις πράξεις του πολλαπλασιασμού και της διαίρεσης. Αυτό σημαίνει ότι οι δύο πράξεις αναπτύσσονται αρχικά ανεξάρτητα και παράλληλα η μια από την άλλη και ότι τα παιδιά ανακαλύπτουν τη μεταξύ τους σχέση αργότερα.

Συνολική θεώρηση των αποτελεσμάτων

Τα αποτελέσματα των παραπάνω μελετών δείχνουν ότι τα μικρά παιδιά κατανοούν κάποιες από τις βασικές πολλαπλασιαστικές και διαιρετικές σχέσεις. Η γνώση αυτή φαίνεται να πηγάζει από τα σχήματα δράσης, που υιοθετούν τα παιδιά στα πλαίσια της καθημερινής τους ενασχόλησης με τις ποσότητες και τους αριθμούς. Τα παιδιά μπορούν να προβλέψουν ποιο γινόμενο και ποιο πηλίκο ή κλάσμα θα είναι μεγαλύτερο, λαμβάνοντας υπόψη τους τις σχέσεις ανάμεσα στους όρους κάθε προβλήματος. Η κατάκτηση αυτή είναι ιδιαίτερα σημαντική, αν σκεφτούμε ότι τα παιδιά αυτά δεν είχαν εισαχθεί στην πράξη του πολλαπλασιασμού και της διαίρεσης στο σχολείο. Τα πρώτα θεμέλια για την κατανόηση του πολλαπλασιασμού και της διαίρεσης τίθενται νωρίς, αλλά η εξέλιξη αυτής της κατανόησης είναι μια μακρά διαδικασία. Το παιδί πρέπει να ανακαλύψει την εσωτερική σχέση, που υπάρχει ανάμεσα στις δύο αυτές πράξεις. Στην αρχή ο πολλαπλασιασμός και η διαίρεση αναπτύσσονται ανεξάρτητα μεταξύ τους. Η κατανόηση της αντίστροφης σχέσης τους θα γίνει αργότερα.

Η μελέτη μάς δίνει μια θετική εικόνα για την κατανόηση του πολλαπλασιασμού και της διαίρεσης από τα μικρά παιδιά. Η γνώση που φέρουν τα παιδιά θα αποτελέσει τη βάση, πάνω στην οποία θα χτίσουν την πολύπλοκη κατανόηση των πολλαπλασιαστικών δομών. Για το λόγο αυτό πρέπει να αξιοποιηθεί και να εμπλουτιστεί από το σχολείο.

Βιβλιογραφία

Acredolo, C., Adams, A., & Schmid, J., «On the understanding of the relationships between speed, duration and distance», *Child Develop-ment*, 55, 1984, pp. 2151-2159.

Anghileri, J., «Uses of counting in multiplication and division». In I. Thompson (ed.), *Teaching and learning early number*, Buckingham, Open University Press, 1997, pp. 41-51.

Bell, A., Greer, B., Grimison, L., & Mangan, C., «Children's performance on multiplicative word problems: Elements of a descriptive theory», *Journal for Research in Mathematics Education*, 20 (5), 1989, pp. 434-449.

Brown, S., «Secondgrade children's understanding of the division process», *School Science and Mathematics*, 92 (2), 1992, pp. 92-95.

Burton, G. M., «Young children's choices of multiplicative strategies for solving whole number division problems», *Focus on Learning Pro blems in Mathematics*, 14 (2), 1992, pp. 2-17.

Carpenter, T. P., & Moser, J. M., «The development of addition and subtraction problem solving skills». In T. P. Carpenter, J. M. Moser & T. A. Romberg (ed.), *Addition and subtraction: A cognitive perspective,* Hillsdale, New Jersey, Lawrence Erlbaum Associates, 1982, pp. 9-24.

Carpenter, T. P., & Moser, J. M., «The acquisition of addition and subtraction concepts». In R. Lesh & Landau, M. (ed.), *Acquisition of Mathematics Concepts and Processes,* New York, Academic Press, 1983, pp. 7-44.

Carpenter, T. P., Ansell, E., Franke, M. L., Fennema, E., & Weisbeck, L., «Models of problems solving: A study of kindergarden children's problem solving processes», *Journal for Research in Mathematics Education*, 24 (5), 1993, pp. 428-441.

Carraher, T. N., & Bryant, P., «Children's understanding of arithmetic operations», *Proceedings of the Satellite ISSBD Meeting*, Beijing, 1987.

Correa, J., Nunes, T., & Bryant, P., «Young children's understanding of division: the relationship between division terms in a noncommutative task», *Journal of Educational Psychology*, 90 (2), 1998, pp. 1-9.

Davis, G. E., & Pepper, K. L., «Mathematical problems solving by pre-school children», *Educational Studies in Mathematics*, 23, 1992, pp. 397-415.

Davis, G. E., & Pitkethly, A., «Cognitive aspects of sharing», *Journal for Research in Mathematics Education*, 21 (2), 1990, pp. 145-153.

Desforges, A., & Desforges, C., «Number based strategies of sharing in young children», *Educational Studies*, 6 (2), 1980, pp. 97-109.

Frydman, O., & Bryant, P. E., «Sharing and understanding of the number equivalence by young children», *Cognitive Development*, 3, 1988, pp. 323-329.

Frydman, O., *The role of correspondence in the development of number based strategies in young children*, Unpublished doctoral dissertation, Oxford University, 1990.

Fuson, K. C., «Research on whole number addition and subtraction». In D. A. Grouws (ed.), *Handbook of research on mathematics teaching and learning*, New York, Macmillan, Reston, VA, National Council of Teachers of Mathematics, 1992, pp. 243-275.

Hughes, M., *Children and number. Difficulties in learning mathematics*. Oxford, Blackwell Publishers, 1986.

Hunting, R. P., & Davis, G. E., «Dimensions of young children's conceptions of the fraction one half». In R. P. Hunting and G. E. Davis (ed.), *Early fraction learning*, New York, Springer-Verlag, 1991, pp. 27-53.

Kieren, T., «Multiple views of multiplicative structures». In G. Harel and J. Confrey (ed.), *The development of multiplicative reasoning in the learning of mathematics*, Albany, New York, State University of New York Press, 1994, pp. 389-400.

Kouba, V. L., «Children's solution strategies for equivalent set multiplication and division problems», *Journal for Research in Mathematics Education*, 20 (2), 1989, pp. 147-158.

Miller, K., «Measurement procedures and the development of quantitative concepts». In C. Sophian, *Origins of cognitive skills. The eighteen annual carnegie symposium on cognition*, Hillsdale, New Jersey, Lawrence Erlbaum Associates, 1984, pp. 193-228.

Nesher, P., «Solving multiplication word problems». In G. Leinhardt, R. T. Putnam, & R. Hattrup (ed.), *Analysis of arithmetic for mathematics teaching*, Hillsdale, New Jersey, Lawrence Erlbaum Associates, 1992, pp. 189-220.

Piaget, J., *The child's conception of number*, New York, Norton, 1965.

Riley, M., Greeno, J. G., & Heller, J. I., «Development of children's solving ability in arithmetic». In H. Ginsburg (ed.), *The development of mathematical thinking*, New York, Academic Press, 1983, pp. 153-96.