

**-Παράλληλες Ανακοινώσεις A-****1. 5****ΠΑ 5**

**Ο ρόλος της ένα-προς-ένα αντιστοιχίας στο σχηματισμό ίσων ιππίκων κατά τη διαδικασία μοιράσματος από τα παιδιά προσχολική πλικίας**

**Κορνηλάκη Ν. Αικατερίνα,**

Λέκτορας Ψυχολογίας της Προσχολικής Ηλικίας Παιδαγωγικού Τμήματος Νηπιαγωγών Πανεπιστημίου Κρήτης,  
ekornilaki@edc.uoc.gr

**ΛΕΞΕΙΣ ΚΛΕΙΔΙΑ:**

Ένα-προς-ένα αντιστοιχία, μοίρασμα, τέλεια και ατελή μοιράσματα

**ΘΕΜΑΤΙΚΗ ΕΝΟΤΗΤΑ:**

Διδακτική των Μαθηματικών, Ανάπτυξη Μαθηματικών Εννοιών

**ΕΠΙΠΕΔΟ ΕΚΠΑΙΔΕΥΣΗΣ:**

Προσχολική Ηλικία

**ΚΑΤΗΓΟΡΙΑ ΕΡΓΑΣΙΑΣ:**

Εμπειρική

**Περίληψη:**

Η μελέτη εξετάζει, αν τα παιδιά προσχολικής ηλικίας κατανοούν το μαθηματικό υπόβαθρο της αντιστοιχίας ένα-προς-ένα, που υιοθετούν κατά τη διαδικασία του μοιράσματος. Εικοσιοκτώ νήπια μέσης ηλικίας 5,05 ετών εξετάστηκαν σε δύο σειρές δραστηριοτήτων. Στην πρώτη δραστηριότητα, τους ζητήθηκε να κρίνουν την ισότητα ή μη των πηλίκων σε περιπτώσεις που τηρούνταν ή παραβιάζονταν οι κανόνες της ένα-προς-ένα αντιστοιχίας. Στη δεύτερη δραστηριότητα, τους ζητήθηκε να εκτελέσουν μια σειρά τέλειων και ατελών μοιρασμάτων σε κάποιες

## A1. ΕΙΔΙΚΑ ΔΙΔΑΚΤΙΚΑ ΘΕΜΑΤΑ, ΓΕΩΜΕΤΡΙΑ

από τις οποίες δεν είχαν οπτική πρόσβαση στα σχηματίζομενα πηλίκα. Υποθέσαμε ότι, αν τα νήπια βασίζονταν σε επιφανειακά κριτήρια, τότε η επίδοσή τους θα μειωνόταν στις περιπτώσεις των ατελών μοιρασμάτων, όταν δεν θα είχαν θέαση των πηλίκων. Βρέθηκε ότι στην πρώτη περίπτωση η πλειονότητα των νηπίων εντόπισε με ευκολία την παραβίαση των κανόνων της ένα-προς-ένα αντιστοιχίας, κρίνοντας ότι στις περιπτώσεις αυτές τα πηλίκα δεν ήταν ίσα. Στη δεύτερη δραστηριότητα, η επίδοση των νηπίων δεν επηρεάστηκε από τη θέαση ή μη των πηλίκων. Τα αποτελέσματα της μελέτης οδηγούν στο συμπέρασμα ότι η πλειονότητα των νηπίων κατανοεί σε βάθος τη σημασία της ένα-προς-ένα αντιστοιχίας για το σχηματισμό ίσων μερισμάτων.

### -Presentations A-

#### 1. 5

PP 5

#### *Preschool children's understanding the one-to-one correspondence basis of distributive counting*

##### **Abstract**

The study examines preschool children's understanding of the one-to-one correspondence basis of distributive counting. Twenty-eight children, mean age 5;05 years were tested in two tasks. The first task examined whether the children could discriminate between the violation and non-violation of the one-to-one correspondence, when the sharing was performed by a doll, and relate this to the fairness of sharing. The second task examined children's understanding of the one-to-one correspondence principle in non-exhaustive sharings when the shares were either visible or invisible. It was hypothesized that if children's judgements of the fairness of sharing lay on superficial cues, then their performance would be affected by the invisibility of the quotas. It was found that children could discriminate between correct and incorrect sharing. The children were confident that the violation of temporal correspondence resulted in unequal shares. Children's performance was not affected by the visibility of the shares in the second condition. The findings of the study suggest that young children have a good understanding of the principle of one-to-one correspondence in the context of distributive counting.

##### **1. Εισαγωγή**

Με τη λέξη «μοιράζω» τα νήπια έρχονται σε επαφή από πολύ νωρίς στη ζωή τους. Οι γονείς τους συχνά τα παρατρύνουν τα μοιράζοντα τα παιχνίδια τους με τα άλλα νήπια. Έτσι, η πρώτη έννοια που σχηματίζουν τα νήπια για τη λέξη «μοιράζω», είναι αυτή του «δίνω και στους άλλους». Γρήγορα, όμως, τα νήπια φαίνεται να κατακτούν και τη μαθηματική έννοια του όρου, όπως αυτή κατανοείται στα πλαίσια της διαίρεσης, δηλαδή, «χωρίζω μια ποσότητα σε τόσα ίσα μέρη, όσα είναι και οι αποδέκτες της». Ήδη από την ηλικία των 3 με 4 ετών, τα νήπια, προκειμένου να μοιράσουν δίκαια μεταξύ τους π.χ. ένα σακουλάκι καραμέλες, δίνουν κυκλικά από μια καραμέλα στον κάθε αποδέκτη (μία για τον Α, μία για τον Β, μία για τον Α, κ.ο.κ.), μέχρις ότου εξαντληθούν οι καραμέλες (Desforges & Desforges, 1980, σελ. 104· Nunes & Bryant, 1996, σελ 41). Αυτό το σχήμα δράσης είναι γνωστό ως *dealing* ή *distributive counting* (μοιρασμό).

Ειδικότερα, σύμφωνα με τους Davis & Pepper (1992, σελ. 397) με τον όρο μοιρασμά εννοούμε «την κυκλική διανομή όμοιων ασυνεχών ποσοτήτων κατά την οποία διανομή δίνουμε στον κάθε αποδέκτη την ίδια ποσότητα, μέχρις ότου εξαντληθούν οι γύροι του μοιράσματος». Όπως τονίζουν οι ίδιοι μελετητές, το σχήμα δράσης του μοιράσματος αποτελεί μια σημαντική κατάκτηση του νηπίου, γιατί βασίζεται στο σχήμα τής ένα-προς-ένα αντιστοιχίας, το οποίο απαιτείται και για την κατανόηση του αριθμού. Η πιο απλή μορφή μοιράσματος είναι αυτή κατά την οποία δίνουμε σε όλους τους γύρους από ένα αντικείμενο σε κάθε αποδέκτη. Στις πιο σύνθετες μορφές μοιράσματος, όμως, μπορεί να δίνεται στους αποδέκτες ο ίδιος μεν αριθμός αντικειμένων ανά γύρο, αλλά ο αριθμός αυτός μπορεί να ποικίλει από γύρο σε γύρο (Davis & Pepper, 1992, σελ. 397).

Η ικανότητα αυτή των νηπίων να μοιράζουν μια ποσότητα έχει γίνει αντικείμενο μελέτης πολλών ερευνών. Οι Desforges & Desforges (1980) εξέτασαν την ικανότητα των παιδιών ηλικίας 3 ½ έως 6 ½ ετών να μοιράζουν δίκαια ασυνεχίες ποσότητες και τις μεθόδους που τα νήπια υιοθετούσαν, προκειμένου να σχηματίσουν ισορεγέθη πηλίκα. Τα αποτελέσματα της μελέτης τους έδειξαν ότι η πλειονότητα των νηπίων, ιδιαίτερα αυτά που ανήκαν στη μεγαλύτερη ηλικιακή ομάδα, εκτέλεσε με επιτυχία τις μοιρασίες που τους δόθηκαν. Βρέθηκε ακόμα ότι η

επίδοση των νηπίων επηρεάστηκε από το μέγεθος του διαιρετέου και του διαιρέτη, ιδιαίτερα στις μικρές ηλικίες. Όσον αφορά τις μεθόδους λύσης που ακολούθησαν, τα περισσότερα νήπια ανεξάρτητα από την ηλικίας έκαναν τη μοιρασιά δίνοντας από μια καραμέλα σε κάθε αποδέκτη, έως ότου εξαντλήθηκαν οι καραμέλες που είχαν (μία για τον Α, μία για το Β, μία για τον Α κ.ο.κ.). Ακολουθούσε σε συχνότητα η διανομή των καραμελών σε ομάδες των δύο ή τριών (δύο για τον Α, δύο για το Β, δύο για τον Α κ.ο.κ.), ιδιαίτερα στις περιπτώσεις εκείνες που το μέγεθος του διαιρετέου ήταν μεγάλο, για να γίνει η διανομή σε λιγότερο χρόνο. Τέλος, σε κάποιες λίγες περιπτώσεις τα νήπια προσπάθησαν να χωρίσουν τη διαιρετέα ποσότητα σε ίσα μέρη κάνοντας προσθαφαρέσεις, προκειμένου να σχηματιστούν τόσα ίσα μερίδια όσα ήταν και οι αποδέκτες (Desforges & Desforges, 1980, σελ. 99-101). Οι Desforges & Desforges μελέτησαν όχι μόνο την επίδοση των παιδιών στις τέλειες αλλά και τις ατελείς μοιρασιές, που ήταν συγκριτικά πιο δύσκολες για όλες τις ηλικιακές ομάδες. Τα παιδιά αντέδρασαν με διάφορους τρόπους, όταν βρέθηκαν αντιμέτωπα με το υπόλοιπο της μοιρασιάς. Πολλά από αυτά, ιδιαίτερα τα μικρότερα, ζήτησαν και άλλες καραμέλες, προκειμένου να ολοκληρώσουν τη μοιρασιά. Πολλά ήταν εκείνα, που βρέθηκαν σε αμηχανία και δεν ήξεραν τι να κάνουν, ενώ άλλα μοίρασαν το υπόλοιπο καταλήγοντας σε άνισα μερίδια. Λίγα νήπια πρότειναν να χωρίσουν το υπόλοιπο σε ίσα μέρη και να το μοιράσουν, ενώ ένας ικανοποιητικός αριθμός παιδιών, που προοδευτικά αυξανόταν με την ηλικία, αγνόησε το υπόλοιπο αφήνοντάς το στην άκρη (Desforges & Desforges, 1980, σελ. 104-105).

Σε παρόμοια αποτελέσματα κατέληξαν και οι μελέτες των Miller (1984) και Hunting & Sharpley (1988), οι οποίοι εξέτασαν την ικανότητα παιδιών προσχολικής και πρώτης σχολικής ηλικίας (3 έως 5 ετών), να μοιράζουν συνεχείς και συνεχείς ποσότητες. Βρέθηκε ότι το μοίρασμα των ασυνεχών ποσοτήτων ήταν σημαντικά πιο εύκολο από αυτό των συνεχών. Η πλειονότητα του νεαρού αυτού δείγματος μοίρασε με επιτυχία τις ασυνεχείς ποσότητες με τη μέθοδο της κυκλικής ένα-προς-ένα αντιστοιχίας Κατά το Miller (1984, σελ. 199-200), η υιοθέτηση της μεθόδου αυτής δείχνει ότι τα παιδιά κατανοούν από νωρίς ότι η ένα-προς-ένα αντιστοιχία οδηγεί στο σχηματισμό ίσων αριθμητικά ποσοτήτων, άποψη που είχε υποστηριχθεί νωρίτερα και από τον Gelman (1982).

Μελετώντας τα αποτελέσματα των παραπάνω ερευνών καταλήγουμε στο συμπέρασμα ότι τα νήπια από πολύ μικρή ηλικία μοιράζουν με επιτυχία. Υπάρχουν, όμως, κάποιοι λόγοι, οι οποίοι μας κάνουν επιφυλακτικούς ως προς το εάν τα νήπια όντως κατανοούν ότι το μοίρασμα με αντιστοιχία ένα-προς-ένα οδηγεί στο σχηματισμό ίσων αριθμητικά μεριδίων. Όπως αναφέρουν και οι Cowan & Biddle (1989, σελ. 133-134), τα νήπια στις προαναφερθείσες μελέτες ίσως να μπορούσαν να ελέγχουν εύκολα την ισότητα των σχηματιζόμενων μεριδίων, επειδή μπορούσαν να τα δουν. Η θέση αυτή ενισχύεται και από το γεγονός ότι οι πιθανότητες λάθους κατά τη διαδικασία του μοιράσματος αυξάνονται καθώς μεγαλώνει το μέγεθος του διαιρέτη και διαιρετέου (Desforges & Desforges, 1980, σελ. 104). Η αυξημένη πιθανότητα λάθους ίσως να οφείλεται στη δυσκολία των νηπίων να ελέγχουν με το μάτι τα σχηματιζόμενα μεγάλα μερίδια.

Στην παρούσα μελέτη υποθέσαμε ότι, αν τα νήπια κατανοούν ότι η διαδικασία του μοιράσματος με ένα-προς-ένα αντιστοιχία οδηγεί στο σχηματισμό ίσων μερισμάτων, τότε θα μπορούν να κρίνουν την ισότητα ή μη των μερισμάτων στις περιπτώσεις που κάποιος τρίτος εκτελεί τη μοιρασιά, τηρώντας ή παραβιάζοντας τους κανόνες της αντιστοιχίας αυτής. Μάλιστα, για να ισχυροποιήσουμε τη θέση μας αυτή, φροντίσαμε τα νήπια να μην έχουν οπτική πρόσβαση στα σχηματιζόμενα μερίδια. Με τον τρόπο αυτό, η κρίση τους για την ισότητά ή μη των μερισμάτων θα βασίζεται στην προσεκτική παρακολούθηση των κανόνων του μοιράσματος και της ένα-προς-ένα αντιστοιχίας και μόνο.

Οι μέχρι σήμερα μελέτες έχουν δείξει ότι τα νήπια έχουν δυσκολία να εκτελέσουν μια μοιρασιά με υπόλοιπο (Desforges & Desforges, 1980, σελ. 104-105). Δεν μπορούμε, όμως, να πούμε με βεβαιότητα, πού οφείλεται η δυσκολία αυτή. Κατανοούν τα νήπια με βάση τους κανόνες της ένα-προς-ένα αντιστοιχίας ότι η διανομή του υπόλοιπου θα έχει ως αποτέλεσμα το σχηματισμό άνισων μερισμάτων ή απλά βασίζονται σε οπτικά κριτήρια και βλέπουν ότι δίνοντας το υπόλοιπο η μοιρασιά δεν ήταν δίκαιη; Στην παρούσα μελέτη θα προσπαθήσουμε να δώσουμε απάντηση στο ερώτημα αυτό, ζητώντας από τα νήπια να εκτελέσουν μια σειρά τέλειων και ατελών μοιρασμάτων, με τη διαφορά ότι στα μισά δεν θα έχουν οπτική πρόσβαση στα σχηματιζόμενα μερίδια. Αν τα νήπια κατανοούν ότι η τήρηση των κανόνων της ένα-προς-ένα αντιστοιχίας είναι απαραίτητη για το σχηματισμό ίσων πηλίκων, τότε η επίδοσή τους δεν θα επηρεαστεί σημαντικά από τη θέα ή μη των πηλίκων. Αν, όμως, οι κρίσεις τους στηρίζονται σε επιφανειακά κριτήρια, τότε η επίδοσή τους θα επηρεαστεί αρνητικά στις περιπτώσεις, που δεν θα βλέπουν τα μερίσματα.

## 2. Μεθοδολογία

### 2.1 Υποκείμενα

Δύο δημόσια νηπιαγωγεία επιλέχθηκαν τυχαία από την πόλη του Ηρακλείου (cluster sampling). Στη συνέχεια επι-

## A1. ΕΙΔΙΚΑ ΔΙΔΑΚΤΙΚΑ ΘΕΜΑΤΑ, ΓΕΩΜΕΤΡΙΑ

λέχθηκαν 28 νήπια με απλή τυχαία δειγματοληψία. Τα νήπια, 13 αγόρια και 15 κορίτσια, ήταν από 5,16 – 5,67 ετών (μέση ηλικία 5,5 ετών).

### 2.2 Υλικό

Το υλικό της έρευνας αποτελούνταν από 63 καραμέλες και 60 σοκολατάκια 8 διαφορετικών γεύσεων, τα οποία μοιράζαν τα παιδιά, 4 μικρές πάνινες κούκλες και 3 μικρά αρκουδάκια, που διέφεραν μόνο ως προς το χρώμα του φορέματός τους, για να διευκολυνθεί η αναφορά των παιδιών σε αυτά και 4 ξύλινα ποτήρια με μακρύ λαιμό.

### 2.3 Σχεδιασμός

Προκειμένου να εξετάσουμε το ρόλο τής ένα-προς-ένα αντιστοιχίας στο σχηματισμό ίσων μερισμάτων, τα νήπια εξετάστηκαν σε δύο σειρές δραστηριοτήτων.

Στην πρώτη σειρά δραστηριοτήτων, που είχε ως σκοπό να εξετάσει, αν τα νήπια κατανοούν τους κανόνες που διέπουν το μοιρασμα με αντιστοιχία ένα-προς-ένα, τα νήπια παρακολούθησαν μια κούκλα να μοιράζει καραμέλες στις φίλες της. Κάποιες φορές η κούκλα έκανε σωστά τη μοιρασιά (μία για την Α, μία για τη Β, μία για τη Α, κ.ο.κ.), όμως, κάποιες άλλες φορές παραβίαζε τον κανόνα της ένα-προς-ένα αντιστοιχίας. Έτσι, σε μια μοιρασιά, ενώ έδινε από μία καραμέλα στην κάθε κούκλα, σε κάποια έδωσε από δύο (μία για την Α, μία για τη Β, ..., μία για τη Α, δύο για τη Β). Σε μία άλλη μοιρασιά, η κούκλα ξέχασε κάποιον από τους αποδέκτες, ενώ σε κάποια άλλη περίπτωση έδωσε για δύο συνεχόμενες φορές καραμέλες στον ίδιο αποδέκτη (μία για την Α, μία για τη Β, μία για τη Β). Στο τέλος κάθε κύκλου μοιράσματος, τα νήπια έπρεπε να κρίνουν, αν η μοιρασιά ήταν δίκαιη, αν όλοι οι αποδέκτες είχαν ίσες ποσότητες και στις περιπτώσεις αδικίας, ποια κούκλα θεωρούσαν ότι είχε τα λιγότερα ή τα περισσότερα. Προκειμένου, μάλιστα, να αποφύγουμε την άμεση οπτική σύγκριση των μερισμάτων, η κούκλα δεν παρέτασσε τις καραμέλες, που μοιράζε, μπροστά σε κάθε κούκλα, αλλά τις έβαζε μέσα σε ένα ξύλινο ποτηράκι, που ήταν μπροστά από κάθε κούκλα. Αν και στις περισσότερες μελέτες, που εξετάζεται η ικανότητα του νηπίου να μοιράζει μια ασυνεχή ποσότητα, ζητείται από το ίδιο το νήπιο να εκτελέσει το μοιρασμα, στην παρούσα μελέτη επιλέχθηκε η εκτέλεση του μερισμού να γίνει από μία κούκλα, γιατί πιστεύουμε ότι με τον τρόπο αυτό απελευθερωνόταν η προσοχή του νηπίου από την εκτέλεση της διαδικασίας<sup>1</sup> και επικεντρωνόταν στην παρακολούθησή της. Στη πειραματική αυτή συνθήκη τα νήπια παρακολούθησαν την κούκλα να εκτελεί 8 μοιρασιές. Δύο από αυτές ήταν σωστές (8:2 & 9:3), σε δύο μοιρασιές μια κούκλα πήρε από δύο καραμέλες αντί για μία (7:2 & 10:3), σε δύο άλλες η κούκλα ξέχασε έναν από τους αποδέκτες (5:3 & 8:4), ενώ τέλος σε δύο μοιρασιές έδωσε για δύο συνεχόμενες φορές στον ίδιο αποδέκτη (9:2 & 7:3). Στη συνθήκη κατά την οποία η κούκλα ξέχασε έναν από τους αποδέκτες, το μέγεθος ενός διαιρέτη ήταν 4 αντί για 2, για το λόγο ότι η ύπαρξη διαιρέτη με μέγεθος 2, θα ταύτιζε τη συνθήκη αυτή με τη συνθήκη κατά την οποία η κούκλα έδινε για δύο συνεχόμενες φορές στον ίδιο αποδέκτη. Η σειρά με την οποία παρουσιάστηκαν τα μοιράσματα διαφοροποιούνταν συστηματικά ανά υποκείμενο.

Στο δεύτερο κύκλο δραστηριοτήτων ζητήθηκε από τα νήπια να εκτελέσουν τα ίδια μια σειρά τέλειων και ατελών μοιρασμάτων κάτω από δύο διαφορετικές συνθήκες: έχοντας ή μη έχοντας οπτική επαφή με τα σχηματιζόμενα μερίδια. Η εκτέλεση τέλειων μοιρασμάτων είχε το ρόλο συνθήκης ελέγχου, για να εξετάσει, αν τα παιδιά μπορούσαν να εκτελούν με ορθότητα τη μοιρασιά. Στις μοιρασιές που το νήπιο δεν έβλεπε τα σχηματιζόμενα μερίδια, τοποθετούσε τις σοκολάτες που μοιράζε σε ένα αδιάφανο ποτήρι. Στο τέλος κάθε μοιρασιάς το νήπιο ερωτούνταν αν η μοιρασιά ήταν δίκαιη, αν όλοι οι αποδέκτες είχαν ίσα μερίδια και στην περίπτωση των ατελών μοιρασμάτων αν η μοιρασιά ήταν δίκαιη, αν όλοι οι αποδέκτες είχαν ίσα μερίδια και στην περίπτωση των ατελών μοιρασμάτων καταγράφονταν οι αντιδράσεις τους. Κάθε νήπιο κλήθηκε να εκτελέσει 4 τέλειες και 4 ατελείς μοιρασιές, σε 2 εκ των οποίων από κάθε κατηγορία δεν έβλεπε τα σχηματιζόμενα μερίδια. Οι τέλειες μοιρασιές ήταν οι: 6:2, 8:2, 6:3 & 9:3, ενώ οι ατελείς ήταν οι: 5:2, 9:2, 7:3 & 10:3. Οι μοιρασιές δόθηκαν συστηματικά με τυχαία σειρά ανά υποκείμενο τόσο όσον αφορά τη σειρά των τέλειων και ατελών μοιρασμάτων, όσον και τη σειρά αυτών με οπτική και μη πρόσβαση στα πηλίκα.

### 2.4. Διαδικασία

Τα νήπια εξετάστηκαν ατομικά στο χώρο του σχολείου τους. Προκειμένου να εξασφαλιστεί η καλή επικοινωνία μαζί τους, η ερευνήτρια τα είχε επισκεφθεί στο σχολείο την προηγούμενη μέρα και τα είχε γνωρίσει. Στην αρχή κάθε συνέντευξης, η ερευνήτρια σύστηνε στο νήπιο την κούκλα που θα μοιράζει τις καραμέλες και τις φίλες της, που θα τις έπαιρναν. Ζητούσε από κάθε νήπιο να κοιτάξει προσεκτικά πώς θα έκανε η κούκλα τη μοιρασιά και να της πουν στο τέλος, αν την έκανε δίκαια ή πού έδωσε τα περισσότερα ή τα λιγότερα.

Στη δεύτερη δραστηριότητα ζητήθηκε από τα νήπια να μοιράσουν σοκολάτες σε αρκουδάκια. Τονίσθηκε στα παιδιά ότι θα έπρεπε να είναι πολύ προσεκτικά στη μοιρασιά που θα έκαναν, γιατί, αν κάποιο αρκουδάκι έπαιρνε

<sup>1</sup> Με το σκεπτικό ότι η τεχνική αυτή απελευθερώνει την προσοχή των παιδιών από τις προδιαγραφές που απαιτεί η εκτέλεση της διαδικασίας, χρηματοποιηθεί και από τους Gelman & Meck (1983), προκειμένου να εξετασθεί αν τα παιδιά πρασχολίκης ηλικίας κατανύσσουν τις αρχές απαραίμηψης (counting principles).

παραπάνω από τα άλλα, θα μάλωναν μεταξύ τους. Τους υπογραμμίσαμε επίσης ότι θα έπρεπε να μοιράσουν όλες τις καραμέλες, γιατί προηγούμενες μελέτες έχουν δείξει ότι τα νήπια τείνουν να σταματούν το μοιρασμά, όταν κάθε αποδέκτης έχει πάρει από μία (Davis & Pitkethly, 1990, σελ. 146). Αφού τα νήπια εκτελούσαν το μοιρασμά, η ερευνήτρια τα ρωτούσε, αν η μοιρασιά ήταν δίκαιη και στην περίπτωση των ατελών μοιρασμάτων κατέγραφε τις αντιδράσεις τους. Αν το παιδί βρισκόταν σε αμηχανία, του ζητούσε να της εξηγήσει, γιατί υπήρχε κάποιο πρόβλημα στο μοιρασμά.

Στις δύο παραπάνω δραστηριότητες, για να αιτιολογήσουμε την ύπαρξη 8 δοκιμασιών ανά πειραματική συνθήκη, σε κάθε μοιρασιά η κούκλα ή το αρκουδάκι μοίραζε καραμέλες και σοκολάτες με διαφορετική γεύση.

### 3. Αποτελέσματα

Προκειμένου να εξετάσουμε, αν τα παιδιά κατανοούν τη σημασία τής ένα-προς-ένα αντιστοιχίας στο σχηματισμό ισομεγεθών πηλίκων, εξετάσαμε την επίδοσή τους, στις περιπτώσεις που τηρούνταν ή παραβιάζονταν οι κανόνες της αντιστοιχίας αυτής. Για κάθε μοιρασιά που παρακολουθούσε, το νήπιο έπαιρνε από 1 βαθμό, όταν μπορούσε να κρίνει σωστά, αν η μοιρασιά ήταν δίκαιη ή μη και ποιο πηλίκο ήταν το μεγαλύτερο ή το μικρότερο. Η επίδοση των παιδιών δεν επηρεάστηκε από το μέγεθος του διαιρέτη ή του διαιρετέου, για το λόγο αυτό οι βαθμοί συγκεράστηκαν. Όπως φαίνεται και στον Πίνακα 1, η συντριπτική πλειονότητα των νηπίων διέγνωσε σωστά ότι στις περιπτώσεις που το μοιρασμά έγινε σωστά, οι αποδέκτες πήραν όλοι την ίδια ποσότητα. Τα νήπια ακόμα δεν είχαν δυσκολία να εντοπίσουν και τα εσκεμμένα λάθη που έγιναν. Όταν παραβιάζονταν οι κανόνες της ένα-προς-ένα αντιστοιχίας, κατανοούσαν ότι τα σχηματιζόμενα πηλίκα δεν ήταν ίσα και μπορούσαν να εντοπίσουν ποιο ήταν το μεγαλύτερο ή το μικρότερο. Αν και η ανάλυση διακύμανσης δεν εντόπισε σημαντικές διαφορές ανάμεσα στους διάφορους τρόπους μοιράσματος, υπήρχε τάση διαφοροποίησης της επίδοσης των νηπίων στον τύπο II, η οποία ενδεχομένως να αποδειχθεί σημαντική σε μεγαλύτερο δείγμα.

### Πίνακας 1

Ο μέσος όρος επίδοσης των νηπίων ανά τύπο μοιράσματος

Τύπος I	Τύπος II	Τύπος III	Τύπος IV
1,82	1,93	1,86	1,82

Σημείωση. Ανώτατος βαθμός = 2

Τύπος I = η κούκλα έκανε σωστά τη μοιρασιά

Τύπος II = η κούκλα έδωσε σε ένα αποδέκτη από 2 καραμέλες

Τύπος III = η κούκλα ξέχασε έναν αποδέκτη

Τύπος IV = η κούκλα έδωσε καραμέλες για δύο συνεχόμενες φορές στον ίδιο αποδέκτη

Στο δεύτερο κύκλο δραστηριοτήτων ελέγχθηκε η ικανότητα των νηπίων να εκτελούν τέλειες και ατελείς μοιρασίες. Όσον αφορά τις τέλειες ορατές μοιρασίες, η επίδοση των νηπίων ήταν ιδιαίτερα υψηλή, αφού τα περισσότερα εκτέλεσαν με επιτυχία όσες τους δόθηκαν (Πίνακας 2). Σε υψηλά επίπεδα κινήθηκε και η επίδοση των νηπίων στις τέλειες μοιρασίες, στις οποίες δεν είχαν πρόσβαση στη θέαση των πηλίκων. Η στατιστική ανάλυση με t-test έδειξε ότι η ικανότητά τους να εκτελούν μια μοιρασιά επηρεάστηκε σημαντικά από την θέαση των σχηματιζόμενων πηλίκων μόνο στην περίπτωση των τέλειων μοιρασμάτων ( $t=2,12$ ,  $p<0,05$ ). Η διαφορά στην επίδοση ανάμεσα στις ορατές και μη τέλειες μοιρασίες παρατηρήθηκε, όχι επειδή τα νήπια δεν εκτέλεσαν με επιτυχία το μοιρασμά, αλλά διότι στην ερώτηση, αν η μοιρασιά ήταν δίκαιη, κάποια από αυτά ανέφεραν ότι έπρεπε να ελέγχουν το περιεχόμενο των αδιαφανών ποτηριών, για να αποφανθούν για την ισότητά τους.

### Πίνακας 2

Μέσος όρος επίδοσης των νηπίων ανά είδος μοιράσματος και θέαση πηλίκων

Τέλεια Μοιράσματα		Ατελή Μοιράσματα	
Ορατά	Μη ορατά	Ορατά	Μη ορατά
1,78	1,64	1,00	0,93

Σημείωση. Ανώτατος βαθμός = 2

Η επίδοση των νηπίων μειώθηκε ωστόσο δραματικά στις περιπτώσεις εκείνες κατά τις οποίες η μοιρασιά ήταν ατελής. Η στατιστική σύγκριση με t-test κατά ζεύγη έδειξε ότι οι ατελείς μοιρασίες ήταν σημαντικά πιο δύσκολες από τις τέλειες, ανεξάρτητα από το αν ήταν ορατές ή μη ( $t=4,42$ ,  $p<0,001$ ). Αναλυτικότερα, δεκατρία στα είκοσι-

## A1. ΕΙΔΙΚΑ ΔΙΔΑΚΤΙΚΑ ΘΕΜΑΤΑ, ΓΕΩΜΕΤΡΙΑ

οκτώ νήπια στην περίπτωση των ορατών πηλίκων μοίρασαν δίκαια τις σοκολάτες, αφήνοντας στην άκρη το υπόλοιπο που περίσσευε. Όπως φαίνεται και στον Πίνακα 3, από τις 56 περιπτώσεις μοιράσματος που παρατηρήθηκαν (28 νήπια X 2 μη ορατές μοιρασιές), στις 26 τα νήπια εκτέλεσαν σωστά τη μοιρασιά αγνοώντας το υπόλοιπο, σε 17 περιπτώσεις ζήτησαν από την ερευνήτρια και άλλες σοκολάτες προκειμένου να συνεχίσουν το μοίρασμα, σε 9 περιπτώσεις τα νήπια βρέθηκαν σε αμηχανία, ενώ σε 4 μοίρασαν και το υπόλοιπο δημιουργώντας άνισα πηλίκα. Μάλιστα, σε μια περίπτωση που το υπόλοιπο δόθηκε σε κάποιον αποδέκτη, όταν ρωτήθηκε το νήπιο, αν η μοιρασιά ήταν δίκαιη, δήλωσε ότι δεν ήταν δίκαιη, αλλά δεν γνόταν διαφορετικά και ότι κάποια άλλη φορά οι άλλες αρκουδίτσες θα πάρουν περισσότερο! Παρόμοια αντέδρασαν τα νήπια και στην περίπτωση των μη ορατών ατελών μοιρασμάτων. Στις 22 από τις 56 εκτελέσεις τα νήπια άφησαν στην άκρη το υπόλοιπο. Σε 14 περιπτώσεις ζήτησαν και άλλες σοκολάτες προκειμένου να ολοκληρώσουν το μοίρασμα. Σε 10 περιπτώσεις βρέθηκαν σε αμηχανία και δεν ήξεραν τι έπρεπε να κάνουν για να συνεχίσουν, ενώ τέλος σε 10 περιπτώσεις τα νήπια μοίρασαν και το υπόλοιπο. Βλέπουμε ότι στην περίπτωση των μη ορατών ατελών μοιρασμάτων διπλασιάστηκε ο αριθμός των παιδιών που μοίρασε το υπόλοιπο. Όταν τα παιδιά αυτά ρωτήθηκαν αν η μοιρασιά ήταν δίκαιη, κάποια από αυτά είπαν ότι δεν ήταν δίκαιη και ότι η μια αρκουδίτσα είχε παραπάνω, ενώ ένα νήπιο χαρακτηριστικά δήλωσε ότι δεν υπήρχε πρόβλημα, γιατί οι άλλες αρκουδίτσες δεν μπορούσαν να δουν ότι είχε παραπάνω!

### Πίνακας 3

Κατανομή των τρόπων αντιμετώπισης των ατελών μοιρασμάτων από τα νήπια ανά βαθμό θέασης των πηλίκων

	Τρόπος I	Τρόπος II	Τρόπος III	Τρόπος IV
Ορατά πηλίκα	26	17	9	4
Μη ορατά πηλίκα	22	14	10	10

Σημείωση.

Τρόπος I = άφησαν στην άκρη το υπόλοιπο

Τρόπος II = ζήτησαν επιπλέον σοκολάτες

Τρόπος III = βρέθηκαν σε αμηχανία

Τρόπος IV = μοίρασαν και το υπόλοιπο

Όταν τα παιδιά που βρέθηκαν σε αμηχανία ή ζήτησαν παραπάνω σοκολάτες, για να τελειώσουν το μοίρασμα ρωτήθηκαν, τι τα προβλημάτιζε, τα περισσότερα από αυτά με τον ένα ή άλλο τρόπο έδωσαν στην ερευνήτρια να καταλάβει ότι, αν μοίραζαν όλες τις σοκολάτες κάποιος θα έπαιρνε περισσότερες. Από την άλλη πλευρά, δεν νοούνταν για αυτά μοιρασιά, που θα είχε υπόλοιπο. Από τη μια πλευρά, δεν ήταν δίκαιο να μοιράσουν το υπόλοιπο, αλλά από την άλλη δεν ήταν δυνατό να αφήσουν και το υπόλοιπο.

### 4. Συζήτηση και συμπεράσματα

Τα αποτελέσματα της μελέτης αυτής μας οδηγούν στο συμπέρασμα ότι τα παιδιά ηλικίας περίπου 5 ½ ετών κατανοούν πολύ καλά τη σημασία τής ένα-προς-ένα αντιστοιχίας κατά τη διαδικασία του μοιράσματος. Στην πρώτη δραστηριότητα διαπιστώσαμε ότι τα νήπια μπορούσαν να κρίνουν την ισότητα ή μη κάποιων μερισμάτων. Το γεγονός ότι τα νήπια δεν είχαν θέα των σχηματιζόμενων πηλίκων, φανερώνει ότι η κρίση τους για την ισότητα ή μη των μερισμάτων, βασίστηκε αποκλειστικά και μόνο στη γνώση των κανόνων που διέπουν το μοίρασμα με κυκλική ένα-προς-ένα αντιστοιχία.

Το εύρημα αυτό ισχυροποιείται και από την επίδοση των νηπίων στις ορατές και μη ατελείς μοιρασιές. Αν τα νήπια σημείωναν υψηλότερη επίδοση στις ορατές από τις μη ορατές μοιρασιές, θα μπορούσαμε να πούμε ότι η επίδοσή τους επηρεάστηκε από τη θέα των σχηματιζόμενων πηλίκων. Το γεγονός ότι δεν υπήρχε σημαντική διαφορά, σημαίνει ότι το κριτήριο για το σχηματισμό ισομεγεθών πηλίκων δεν είναι επιφανειακό, αλλά στηρίζεται στην καλή γνώση των κανόνων της ένα-προς-ένα αντιστοιχίας. Ακόμα και οι αιτιολογήσεις των νηπίων που βρέθηκαν σε αμηχανία ή αυτών που ζήτησαν επιπλέον σοκολάτες, δείχνουν ότι κατανοούσαν την ανάγκη να ολοκληρώσουν τον κύκλο των ένα-προς-ένα αντιστοιχιών. Ωστόσο, όμως, για πολλά παιδιά αυτής της ηλικίας δεν νοείται η μοιρασιά να έχει υπόλοιπο. Έτσι, κάποια παιδιά αφήνουν το μοίρασμα στη μέση, ενώ κάποια άλλα προβαίνουν στη διανομή του υπολοίπου, ακόμα και αν γνωρίζουν ότι το αποτέλεσμα με τον τρόπο αυτό δεν είναι δίκαιο.

Η επίδοση των νηπίων της μελέτης μας στις ατελείς μοιρασιές και οι μέθοδοι λύσης που αυτά ακολούθησαν είναι συγκρισιμες με αυτές των νηπίων της μελέτης των Desforges & Desforges (1980) στη Βρετανία.

Έχοντας κάποιες επιφυλάξεις τις οποίες υπαγορεύει τόσο ο αριθμός όσο και η προσέλευση του δειγματός μας, καταλήγουμε στο συμπέρασμα ότι τα παιδιά προσχολικής ηλικίας κατανοούν το μαθηματικό υπόβαθρο της διαδι-

κασίας του μοιράσματος. Τα νήπια της μελέτης μας υιοθέτησαν συνειδητά το μοιράσμα με κυκλική ένα-προς-ένα αντιστοιχία για να σχηματίσουν ισομεγέθη πηλίκα και γνώριζαν τους κανόνες που το διέπουν. Η κατανόηση αυτή θεωρείται ιδιαίτερα σημαντική, αφού μέσα στα πλαίσια της τίθενται τα θεμέλια για την κατανόηση της πράξης της διαιρέσης, που θα διδαχθούν τα νήπια πολύ αργότερα.

### Βιβλιογραφικές αναφορές

- Cowan, R., & Biddle, S. (1989). Children's understanding of one-to-one correspondence in the context of sharing. *Educational Psychology*, 9 (2), 133-140.
- Davis, G. E., & Pepper, K. L. (1992). Mathematical problems solving by pre-school children. *Educational Studies in Mathematics*, 23, 397-415.
- Davis, G. E., & Pitkethly, A. (1990). Cognitive aspects of sharing. *Journal for Research in Mathematics Education*, 21 (2), 145-153.
- Desforges, A., & Desforges, C. (1980). Number-based strategies of sharing in young children. *Educational Studies*, 6 (2), 97-109.
- Gelman, R. (1982). Assessing one-to-one correspondence: Still another paper about conservation. *British Journal of Psychology*, 73, 209-220.
- Gelman, R., & Meck, E. (1983). Preschoolers' counting: principles before skills. *Cognition*, 13, 343-360.
- Hunting, R. P., & Sharpley, C. F. (1988). Preschoolers' cognitions of fractional units. *British Journal of Educational Psychology*, 58, 172-183.
- Miller, K. (1984). Child as a measurer of all things: measurement procedures and the development of quantitative concepts. In C. Sophian: *Origins of Cognitive Skills. The Eighteen Annual Carnegie Symposium on Cognition* (pp. 193-228). Hillsdale, New Jersey: Lawrence Erlbaum Associates.
- Nunes, T., & Bryant, P. (1996). *Children Doing Mathematics*. Oxford: Blackwell Publishers.

